

偏微分方程式論における 幾何学的方法 I

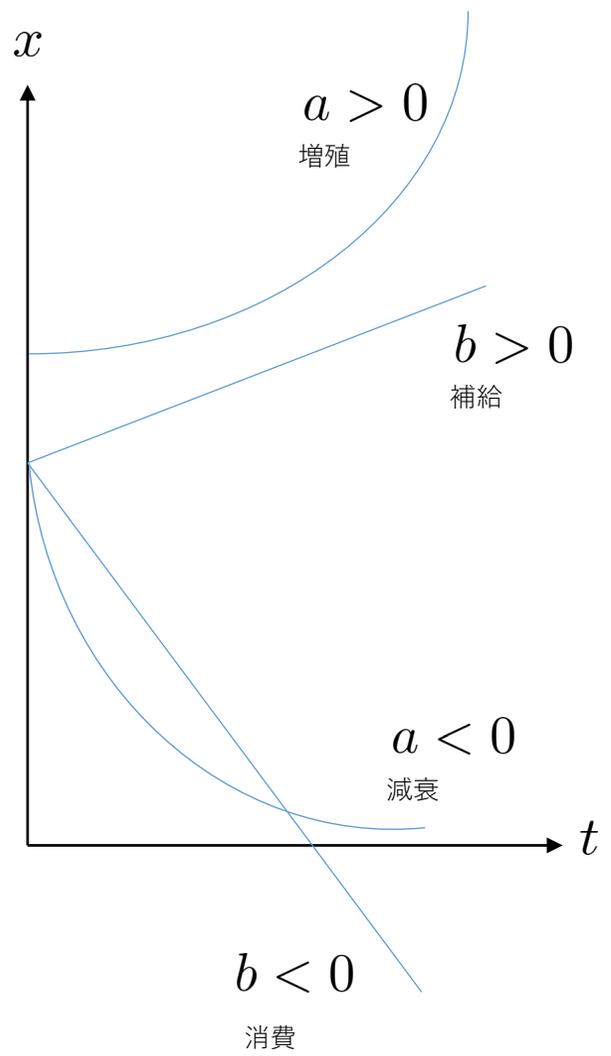
生命現象と幾何計量 (2024.01.29)

鈴木貴 (大阪大学)

生命現象のモデリング

状態量の変化

$$x = x(t)$$



$$\frac{dx}{dt} = b \quad \text{0次反応}$$

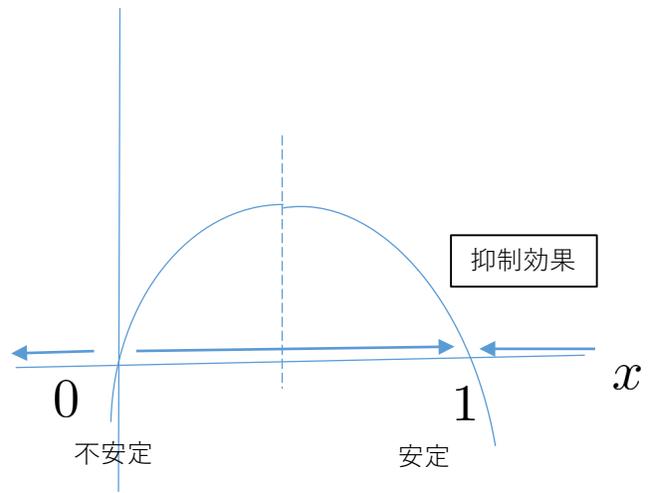
$$\frac{dx}{dt} = ax \quad \text{1次反応}$$

1次元力学系

$$\dot{x} = f(x)$$

$$y = f(x) \quad f(x_0) = 0, x(0) = x_0 \xrightarrow{\text{解の一意的}} x(t) \equiv x_0$$

定常解 (定常状態)



$$f(0) = f(1) = 0$$

$$f(x) > 0, 0 < x < 1$$

$$f(x) < 0, x < 0, x > 1$$

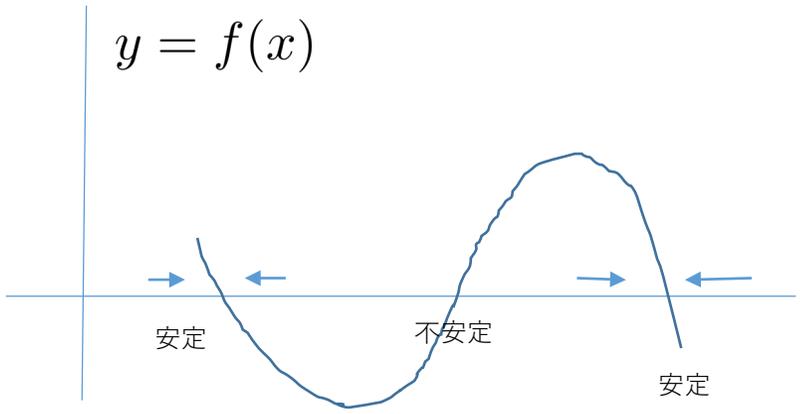
$\rightarrow x = 0, 1$ 定常解

線形化理論 $f'(1) < 0 \rightarrow$ 安定

漸近安定

$f'(0) > 0 \rightarrow$ 不安定

局所理論



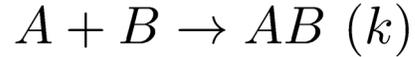
双安定 雪の結晶

大域理論
モース理論

素過程の記述

1. 分子の衝突によって定率で化学反応が発生する
2. 分子の衝突確率は濃度の積に比例する

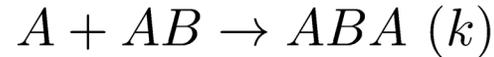
質量作用の法則



$$\frac{d}{dt}[A] = -k[A][B] + \ell[AB]$$

$$\frac{d}{dt}[B] = -k[A][B] + \ell[AB]$$

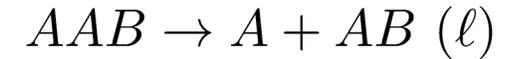
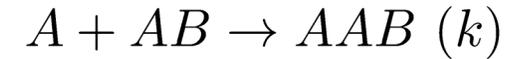
$$\frac{d}{dt}[AB] = k[A][B] - \ell[AB]$$



$$\frac{d}{dt}[A] = -k[A][AB] + 2\ell[ABA]$$

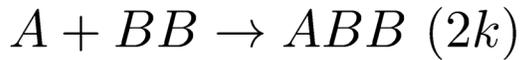
$$\frac{d}{dt}[AB] = -k[A][AB] + 2\ell[ABA]$$

$$\frac{d}{dt}[ABA] = k[A][AB] - 2\ell[ABA]$$



$$\frac{1}{2}N_A(N_A - 1) \approx \frac{N_A^2}{2}$$

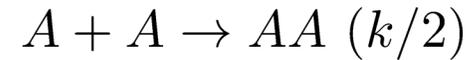
→ 変形3



$$\frac{d}{dt}[A] = -2k[A][BB] + \ell[ABB]$$

$$\frac{d}{dt}[BB] = -2k[A][BB] + \ell[ABB]$$

$$\frac{d}{dt}[ABB] = 2k[A][BB] - \ell[ABB]$$



$$\frac{d}{dt}[A] = 2 \left(-\frac{k}{2}[A]^2 + \ell[AA] \right)$$

$$\frac{d}{dt}[AA] = \frac{k}{2}[A]^2 - \ell[AA]$$

ミカエリスメンテンの式



$$[S] = s, [E] = e, [ES] = f, [P] = p$$

$$\frac{ds}{dt} = -k_1 se + k_{-1} f$$

$$\frac{de}{dt} = -k_1 se + k_{-1} f + k_2 f$$

$$\frac{df}{dt} = k_1 se - k_{-1} f - k_2 f$$

$$\frac{dp}{dt} = k_2 f$$

保存則

$$e + f = e_T$$

準平衡

$$se = k_m f$$

$$k_m = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}$$

平衡定数

$$f = \frac{e_T s}{k_m + s}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{k_2 e_T s}{k_m + s}$$

測定可能

最大反応速度

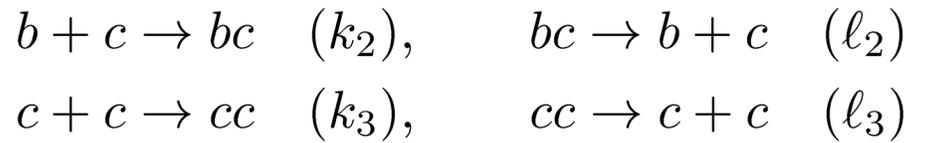
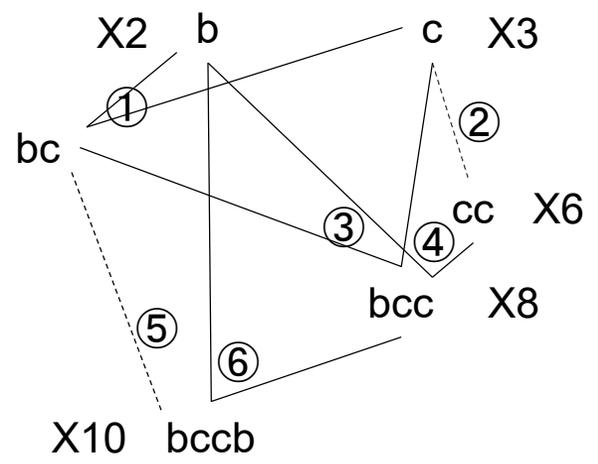


$$\frac{dp}{dt} = \frac{v_m s}{k_m + s}$$

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{v_m s}{k_m + s}$$

$$v_m = k_2 e_T = \max \frac{dp}{dt}$$

反応ネットワークの構築



b - c  簡略化モデル

$$\frac{dX_2}{dt} = \textcircled{1} k_2 X_2 X_3 + l_2 X_5 \textcircled{4} 2k_2 X_2 X_6 + l_2 X_8 - k_2 X_2 X_8 + 2l_2 X_{10} \textcircled{6}$$

$$\frac{dX_3}{dt} = \textcircled{1} k_2 X_2 X_3 + l_2 X_5 \textcircled{2} k_3 X_3^2 + 2l_3 X_6 - \textcircled{3} k_3 X_3 X_5 + l_3 X_8$$

$$\frac{dX_5}{dt} = \textcircled{1} k_2 X_2 X_3 - l_2 X_5 - k_3 X_5 X_3 + l_3 X_8 \textcircled{3} + k_3 X_5^2 + 2l_3 X_{10} \textcircled{5}$$

$$\frac{dX_6}{dt} = \frac{k_3}{2} X_3^2 \textcircled{2} - l_3 X_6 - 2k_2 X_6 X_2 + l_2 X_8 \textcircled{4}$$

$$\frac{dX_8}{dt} = 2k_2 X_2 X_6 - l_2 X_8 \textcircled{4} + k_3 X_3 X_5 - \textcircled{3} l_3 X_8 - k_2 X_2 X_8 + 2l_2 X_{10} \textcircled{6}$$

$$\frac{dX_{10}}{dt} = k_2 X_2 X_8 - 2l_2 X_{10} \textcircled{6} + \frac{k_3}{2} X_5^2 - l_3 X_{10} \textcircled{5}$$

2X6... ..b, c 結合
2X10... ..b, c 解離

単体粒子の質量保存
反応のグルーピング

ケルマック・マッケンドリックモデルの数学解析

文字を置く

- S 未感染者
- I 感染者
- R 除外者

規則を定める (モデリング)

$$S + I \rightarrow I \quad (\beta)$$

$$I \rightarrow R \quad (\gamma)$$

数式を立てる

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

2次反応+1次反応

変数を減らす

$$\frac{d}{dt}(S + I + R) = 0$$

$$N = S + I + R = S_0 + I_0$$

$$R = N - (S + I)$$

法則を導く (積分曲線) $\rho = \gamma/\beta$

$$\frac{dI}{dS} = \frac{dI/dt}{dS/dt} = -1 + \frac{\rho}{S}$$

$$I = -S + \rho \log S + C$$

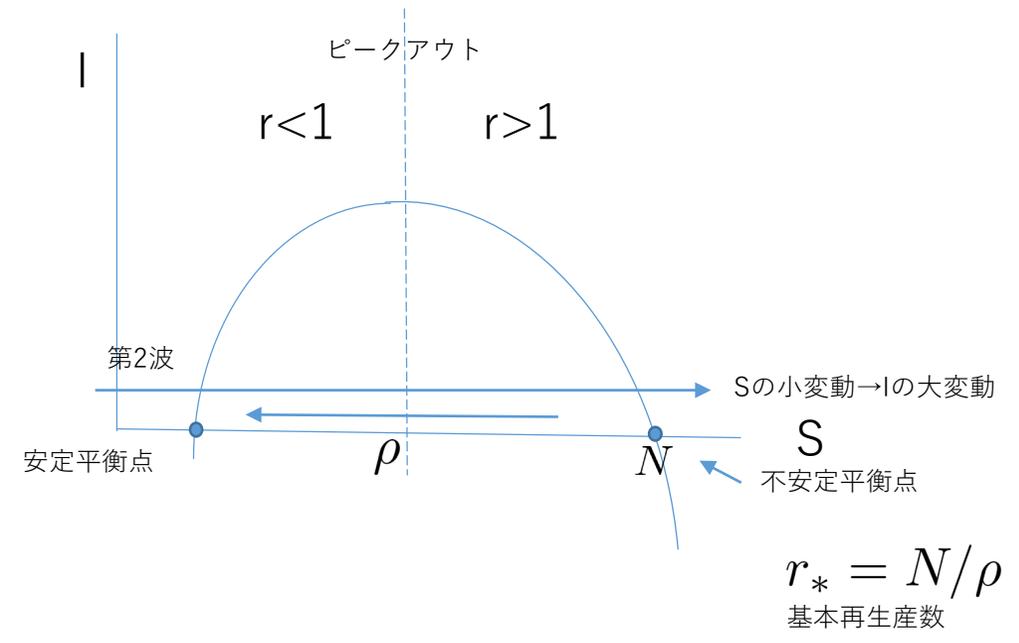
初期値を合わせる

$$I = N - S + \rho \log \left(\frac{S}{S_0} \right)$$

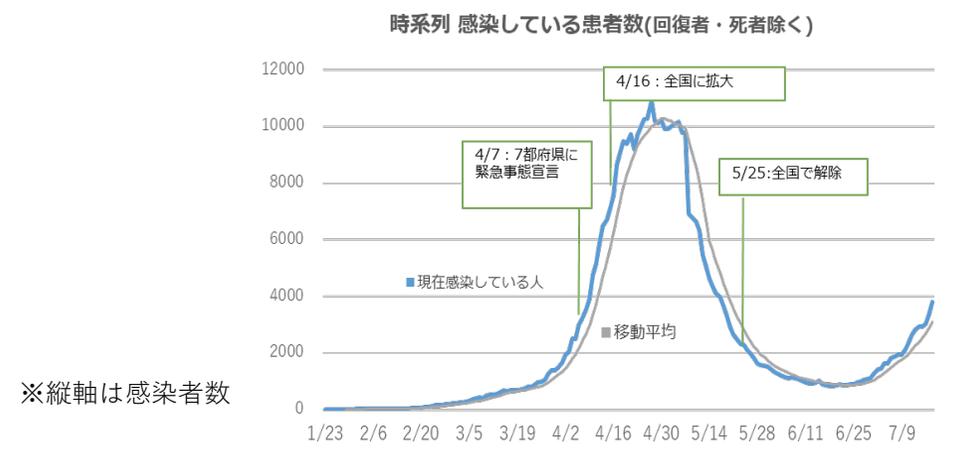
分析する (実効再生産数)

$$r = S/\rho$$

視覚化する (相平面)



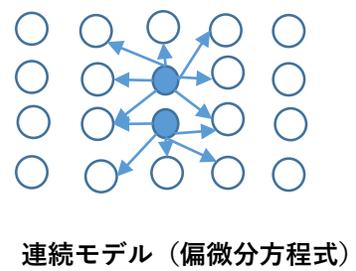
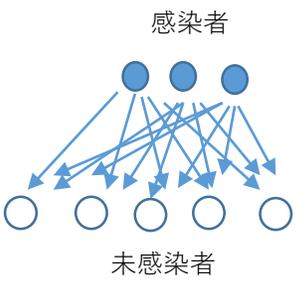
パラメータをデータと合わせ将来を予測する
モデルを再吟味する (潜伏期、再感染、移動)



※縦軸は感染者数

空間分布

- S 未感染者 ○
- I 感染者 ●
- R 除外者 ○
- βI 感染力



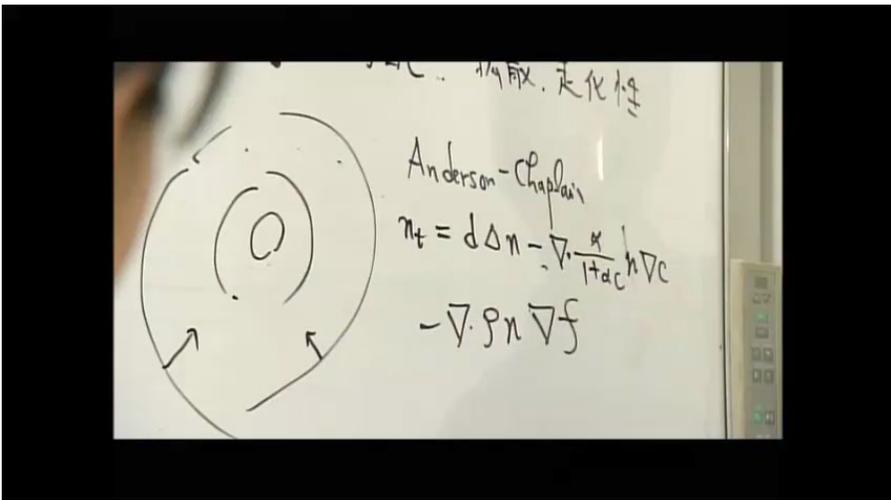
$$\frac{dS}{dt} = -\beta IS$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta IS - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

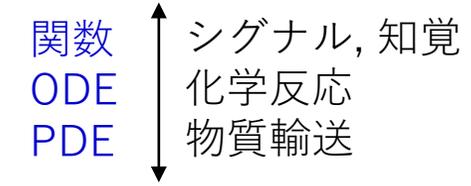


血管新生シミュレーション (数理腫瘍学)
<https://www6.nhk.ro.jp/special/detail/index.html?aid=20180401>



走触性と走化性勾配を用いた
 離散・連続、確率論・決定論のハイブリッドモデル

マルチスケール表現



細胞, 分子

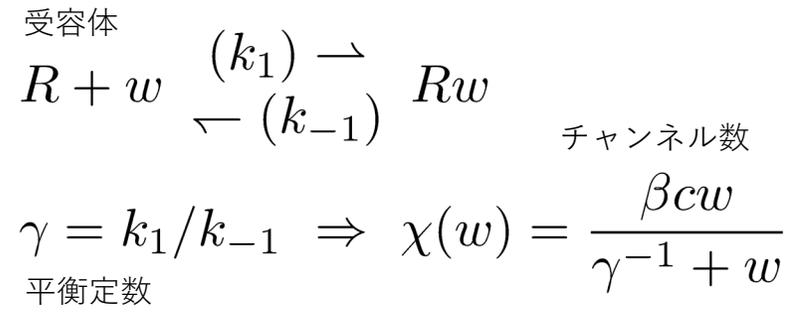
$$p_t = \nabla \cdot (D \nabla p - p \chi(w) \nabla w)$$

$$w_t = g(p, w) \quad \text{リガンド, シグナル}$$

$$g(p, w) = p - \mu w$$

$$g(p, w) = (p - \mu) w$$

$$g(p, w) = \frac{pw}{1 + \nu w} - \mu w + \gamma \frac{p}{1 + p}$$



$$[Rw] = \frac{c w}{\gamma^{-1} + w}, \quad c = [Rw] + [R]$$

昆虫は樹液にたどり着く

$$f = f(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R} \quad \text{物質濃度}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \quad \text{現在地}$$

濃度分布

転置ベクトル

$$x^T = (x_1, x_2, x_3)$$

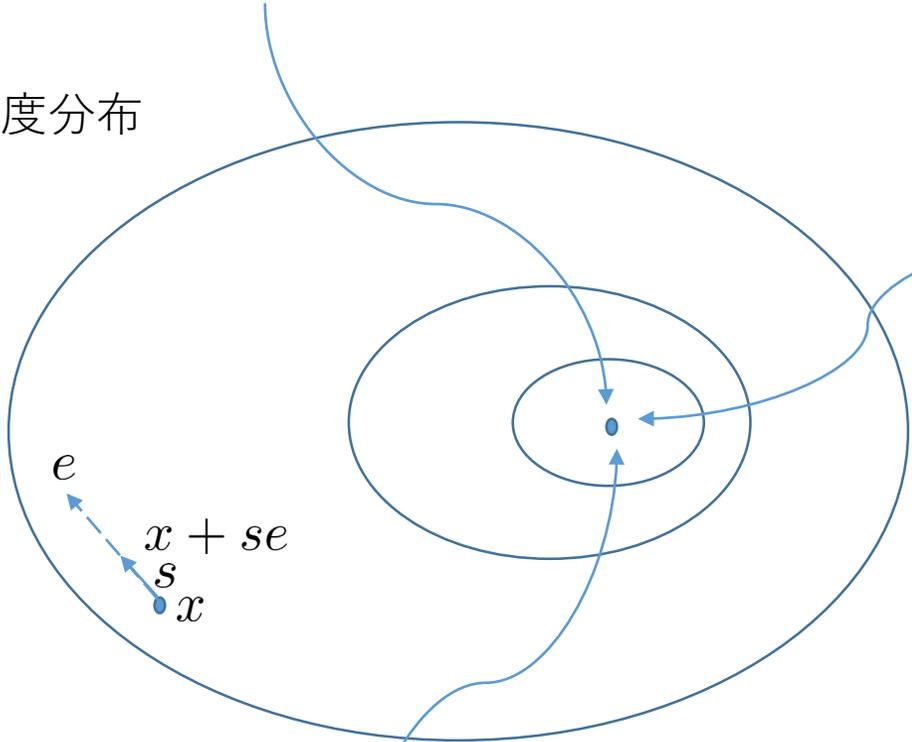
独立変数は横 ベクトルは縦

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \quad \text{単位ベクトル}$$

ベクトルの長さ

$$|e| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2} = 1$$

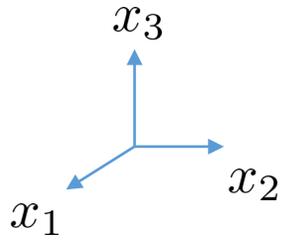
$$0 < s \ll 1$$



$$x + se \in \mathbf{R}^3 \quad \text{仮想的に } e \text{ 方向に距離 } s \text{ だけ 移動した位置}$$

$$f(x + se) = f(x) + \left[\frac{d}{ds} f(x + se) \right]_{s=0} s + o(s), \quad s \rightarrow 0$$

独立変数については縦横のベクトルを同一視する



物質濃度が最大のスポットを探索する

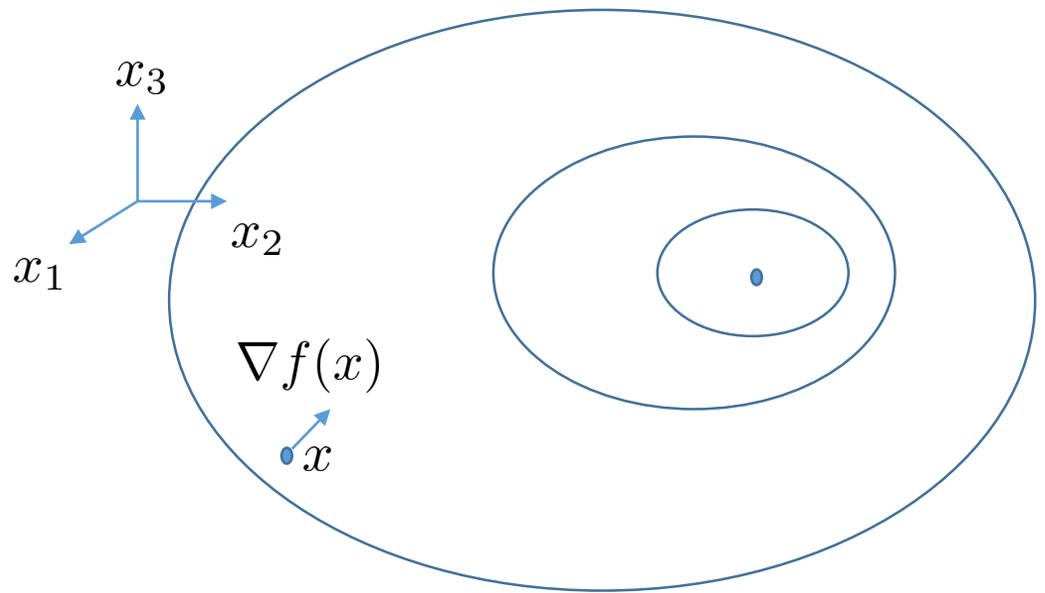
この項が最大となる e の方向に進む

勾配

内積は成分ごとの積の和

$$f(x + se) = f(x_1 + se_1, x_2 + se_2, x_3 + se_3)$$

$$\left. \frac{d}{ds} f(x + se) \right|_{s=0} \stackrel{\text{合成関数の微分}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3)e_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3)e_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3)e_3 \stackrel{\text{内積}}{=} \nabla f(x) \cdot e$$



grad, ナブラ
勾配作用素

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} \text{ 勾配}$$

単位ベクトル

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \text{ 「方向」}$$

内積

$$\nabla f(x) \cdot e \text{ を最大にする } e \in \mathbf{R}^3, |e| = 1 \xrightarrow{\text{長さ}} e = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$$

長さ 1

$$\nabla f(x) = 0 \text{ となる } x$$

↓ def

f の **臨界点**

そのときの

$$\nabla f(x) \cdot e = \frac{\nabla f(x) \cdot \nabla f(x)}{|\nabla f(x)|} = |\nabla f(x)|$$

昆虫には $e = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$ 方向に大きさ $|\nabla f(x)|$ に比例する力が働く

走化性

c.f. 万有引力の法則

勾配ベクトル

$$|\nabla f(x)|e = \nabla f(x)$$

等高面に垂直

流束

質量変化

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_{\text{密度}}} \rho = - \int_{\partial\Omega} \underbrace{\nu \cdot j}_{\substack{\text{ガウス} \\ \text{流束} \\ \text{(フラックス)}}} = - \int_{\Omega} \nabla \cdot j$$

勾配作用素

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix}$$

・ 内積 $\nabla \cdot$ 発散

質量保存

$$\rho_t = -\nabla \cdot j$$

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

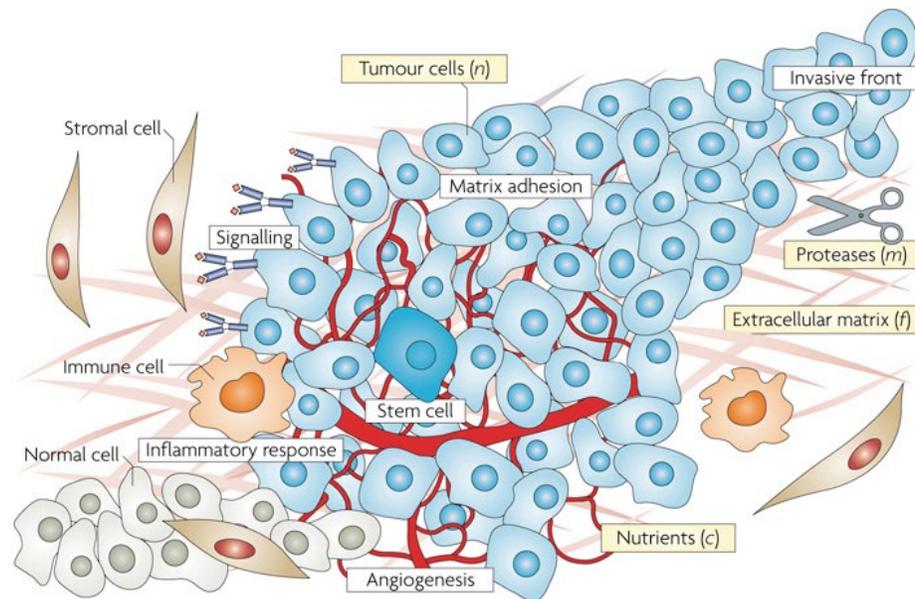
$$v = v(x) \in \mathbf{R}^3, x \in \mathbf{R}^3 \quad \text{速度場}$$

$$\frac{d}{dt} T_t x = v(T_t x), \quad T_t x|_{t=0} = x \quad \{T_t\} \text{ 流れ (力学系)}$$

$$\frac{d}{dt} \det DT_t \Big|_{t=0} = \nabla \cdot v \quad \Omega_t = T_t \Omega$$

リュービル

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho = \int_{\Omega_t} \rho_t + v \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot v \, dx = \int_{\Omega_t} \rho_t + \nabla \cdot \rho v \, dx = 0$$



$$\frac{\delta m}{\delta t} = D_m \nabla^2 m + \mu n_{ij} - \lambda m, \quad \frac{\delta f}{\delta t} = -\delta m f, \quad \frac{\delta c}{\delta t} = D_c \nabla^2 m + \beta f - \gamma n_{ij} c - \alpha c.$$

$$\longrightarrow j = \rho v \quad \text{流束} = \text{質量} \times \text{速度 (運動量)}$$

$$j = -d(u) \nabla u \quad \text{拡散}$$

$$j = d(u, f) u \nabla f \quad \text{走化性}$$



自己組織化のポテンシャル

走化性方程式

Keller-Segel 70

$$\begin{aligned}
 u_t &= \nabla \cdot (d_1(u, v)\nabla u) - \nabla \cdot (d_2(u, v)\nabla v) \\
 v_t &= d_v \Delta v - k_1 vw + k_{-1}p + f(v)u \\
 w_t &= d_w \Delta w - k_1 vw + (k_{-1} + k_2)p + g(v, w)u \\
 p_t &= d_p \Delta p + k_1 vw - (k_{-1} + k_2)p
 \end{aligned}$$

$u = u(x, t)$ 細胞性粘菌

$v = v(x, t)$ 誘引物質

$w = w(x, t)$ 酵素

$p = p(x, t)$ 複合体

輸送・勾配

産生

1. transport, gradient

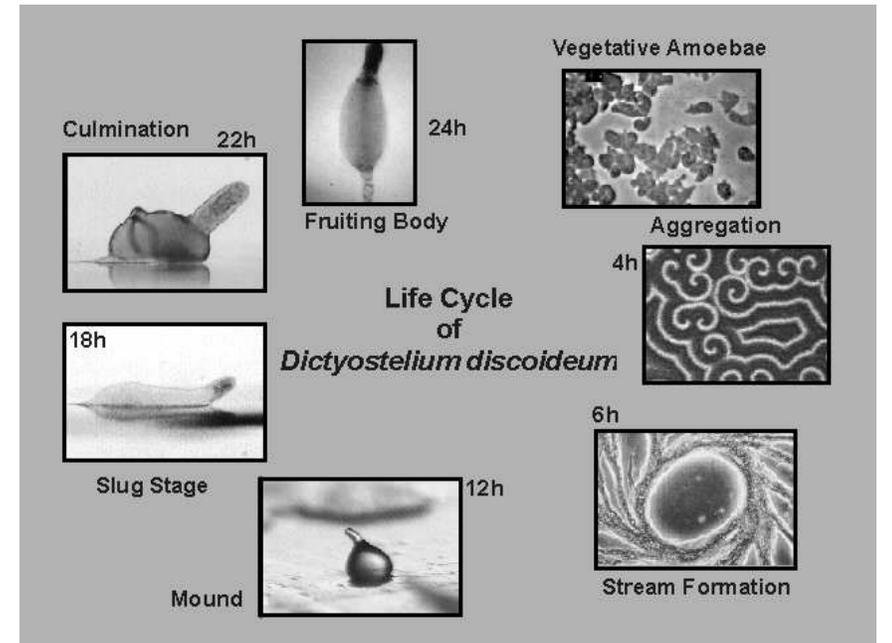
2. production $u \rightarrow (v, w)$

拡散

(a) diffusion u, v, w, p

走化性

(b) chemotaxis $v \rightarrow u$

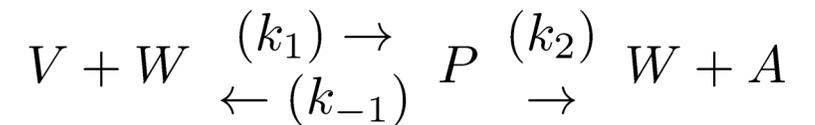


moving clustered cells

aggregating cells

反応

3. chemical reaction v, w, p



$$v_t = -k_1 vw + k_{-1}p$$

$$w_t = -k_1 vw + (k_{-1} + k_2)p$$

$$p_t = k_1 vw - (k_{-1} + k_2)p$$

方程式の簡略化

$$v_t = -k_1vw + k_{-1}p$$

$$w_t = -k_1vw + (k_{-1} + k_2)p$$

$$p_t = k_1vw - (k_{-1} + k_2)p$$

$$k_1vw - (k_{-1} + k_2)p = 0 \quad \text{準静的}$$

$$w + p = c \quad \text{質量保存}$$



$$u_t = \nabla \cdot (d_1(u, v)\nabla u) - \nabla \cdot (d_2(u, v)\nabla v)$$

$$v_t = d_v\Delta v - k(v)v + f(v)u$$

$$k(v) = \frac{ck_1k_2}{(k_{-1} + k_2) + k_1v}$$

$$d_1(u, v), k(v), f(v) \quad \text{定数}$$

$$d_2(u, v) = u\chi'(v) \quad \text{質量} \times \text{速度} = \text{流束 (運動量)}$$

知覚関数

$$u_t = d_u\Delta u - \nabla \cdot (u\nabla\chi(v))$$

$$v_t = d_v\Delta v - b_1v + b_2u$$

粒子の移動

スモルコフスキー部分

$$u_t = \nabla \cdot (\nabla u - u\nabla v), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega} = 0$$

場の形成

ポアソン部分

$$-\Delta v = u - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u, \quad \int_{\Omega} v = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega} = 0$$



スモルコフスキー・ポアソン方程式

定常状態

$$u > 0, \delta\mathcal{F}(u) = 0$$

$$\|u\|_1 = \lambda$$

$$\rightarrow u = \frac{\lambda e^v}{\int_{\Omega} e^v}$$

ボルツマン・ポアソン方程式

$$-\Delta v = \frac{\lambda e^v}{\int_{\Omega} e^v} \text{ in } \Omega, \quad v|_{\partial\Omega} = 0$$

スモルコフスキー方程式

$$u_t = \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla v)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0$$

duality

粒子密度



場の分布

ポアソン方程式

$$-\Delta v = u \text{ in } \Omega, \quad v|_{\partial\Omega} = 0$$

$$v(x) = \int_{\Omega} G(x, x') u(x') dx' \quad \text{重力場}$$

Kinetic theory of Boltzmann

system	invariant	kinetics	ensembles
open	pressure	Gibbs free energy	grand-canonical
closed	temperature	Helmholtz free energy	canonical
isolated	energy	entropy	micro-canonical

Variational structure

Helmholtz's free energy

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} u(\log u - 1) - \frac{1}{2} \langle (-\Delta)^{-1} u, u \rangle$$

$$\delta\mathcal{F}(u) = \log u - (-\Delta)^{-1} u$$

$$u_t = \nabla u \cdot \nabla \delta\mathcal{F}(u), \quad \frac{\partial}{\partial \nu} \delta\mathcal{F}(u) \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{model B equation}$$

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_1 = 0$$

total mass conservation

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(u(t)) = - \int_{\Omega} u |\nabla \delta\mathcal{F}(u)|^2 \quad \text{free energy decreasing}$$

$$-\Delta v = u, \quad v|_{\partial\Omega} = 0$$

$$u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v), \quad -\Delta v = u \quad \text{in } \Omega \times (0, T)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} = v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times (0, T)$$

$$\rightarrow -\Delta v = \frac{\lambda e^v}{\int_{\Omega} e^v}, \quad v|_{\partial\Omega} = 0$$

ボルツマン・ポアソン方程式

非線形固有値問題

$$u \geq 0, \quad \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_1 = 0$$

質量保存
自由エネルギー減少

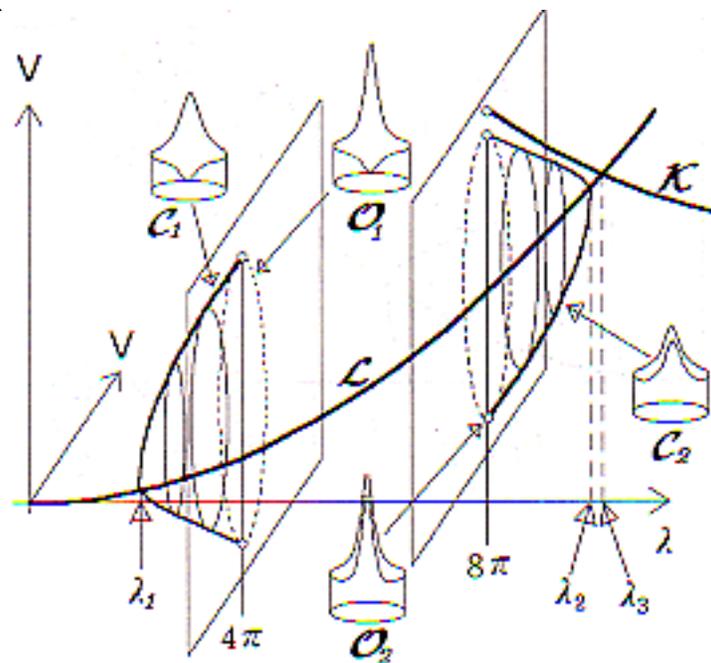
$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(u) = - \int_{\Omega} u |\nabla(\log u - v)|^2 dx$$

定常状態 \rightarrow

$$\log u - v = \text{constant}, \quad \|u\|_1 = \lambda$$

$$\rightarrow u = \frac{\lambda e^v}{\int_{\Omega} e^v}$$

ボルツマン方程式



Senba-S. 00

$$\lambda = 8\pi, 4\pi$$

内部 境界

走化性方程式の場合

$$-\Delta v = \lambda \left(\frac{e^v}{\int_{\Omega} e^v} - \frac{1}{|\Omega|} \right), \quad \int_{\Omega} v = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0$$

有限時間爆発の量子化

定理2 $T < +\infty \rightarrow$

$$u(x, t)dx \rightarrow \sum_{x_0 \in \mathcal{S}} m(x_0)\delta_{x_0}(dx) + f(x)dx$$

$m(x_0) \in 8\pi\mathbf{N}$ コラプス質量の量子化

爆発集合

$$\mathcal{S} = \{x_0 \in \bar{\Omega} \mid \exists x_k \rightarrow x_0, t_k \uparrow T, u(x_k, t_k) \rightarrow +\infty\}$$

$$\mathcal{S} \subset \Omega, 0 < f(x) \in L^1(\Omega \cap C(\bar{\Omega} \setminus \mathcal{S}))$$

$G = G(x, x')$ グリーン関数

$R = R(x)$ ロバン関数

点渦系ハミルトニアン

$$H_\ell(x_1, \dots, x_\ell) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\ell} R(x_j) + \sum_{1 \leq i < j \leq \ell} G(x_i, x_j)$$

無限時間爆発の量子化

定理3

$$T = +\infty, \limsup_{t \uparrow +\infty} \|u(\cdot, t)\|_\infty = +\infty$$

$$\rightarrow \lambda \equiv \|u_0\|_1 = 8\pi\ell, \exists \ell \in \mathbf{N}$$

$$\exists x_* \in \Omega^\ell, \nabla H_\ell(x_*) = 0 \quad \text{動的な循環的階層}$$

系1 $T < +\infty$ if

$$(1) \lambda \notin 8\pi\mathbf{N}, \nexists \text{定常解} \text{ or } \mathcal{F}(u_0) \ll -1$$

$$(2) \lambda \in 8\pi\mathbf{N}, \nexists H_\ell \text{ 臨界点}$$

系2 Ω 凸 $\lambda \neq 8\pi$

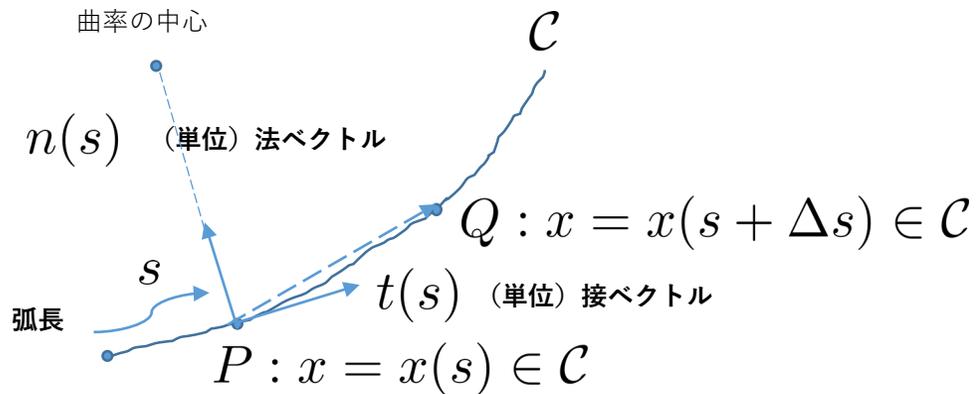
$$\Rightarrow T < +\infty \text{ or } T = +\infty \text{ プレコンパクト軌道}$$

Grossi-F. Takahashi 2010

↓ 勾配不等式の理論
 \exists 定常解に一様収束

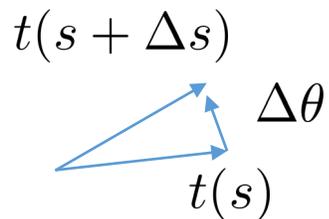
幾何学の言葉

曲線のパラメータ表示



$$|t|^2 = t \cdot t = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{dt}{ds} \cdot t = 0$$

$$|t(s + \Delta s) - t(s)| = \Delta\theta + o(\Delta\theta)$$



$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$$

$$t = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} (x(s + \Delta s) - x(s)) = \frac{dx}{ds}$$

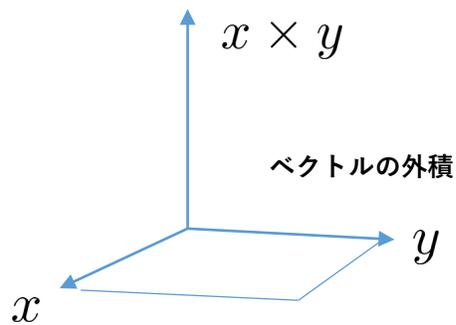
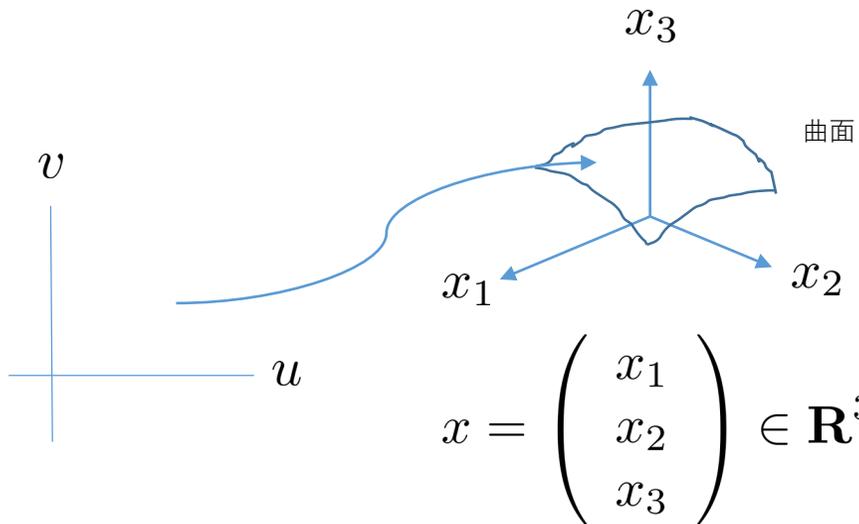
$$\left| \frac{dx}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{x(s + \Delta s) - x(s)}{\Delta s} \right| = 1$$

$$\left| \frac{dt}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{t(s + \Delta s) - t(s)}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| = \left| \frac{1}{\rho} \right|$$

$$\rightarrow \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\rho} n$$

$$\boxed{\frac{d}{ds} (t \cdot t) = \frac{dt}{ds} \cdot t + t \cdot \frac{dt}{ds} = 2 \frac{dt}{ds} \cdot t}$$

曲面のパラメータ表示



ベクトルの成分表示
基底ベクトル間の演算
交換・結合・分配則

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

面積要素

$$dS = |x_u \times x_v| du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv$$

曲面上平行四辺形の無限小面積

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$$

$$x = x(u, v) \quad dx = x_u du + x_v dv$$

$$x_u = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u} \right)^T$$

$$x_v = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v} \right)^T$$

第1基本形式

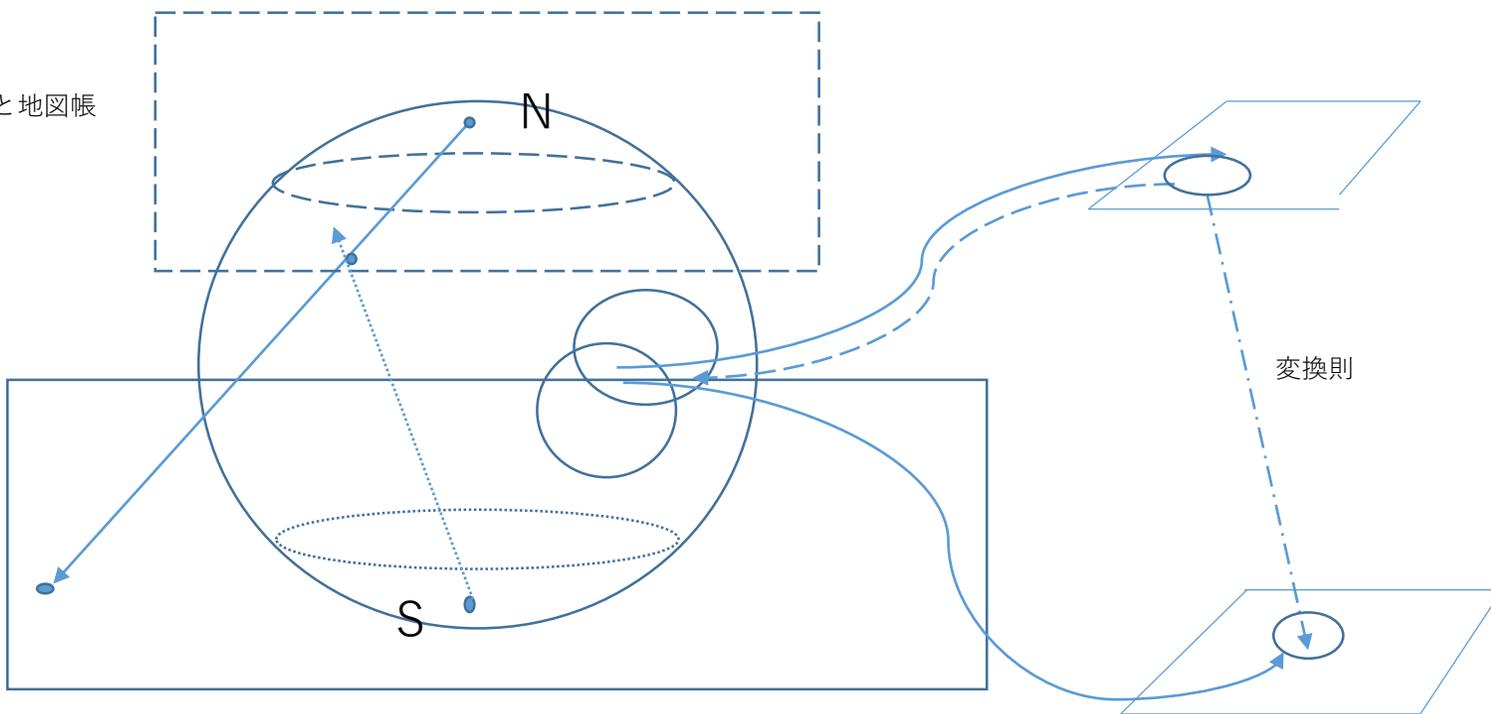
曲面上2点の無限小距離

$$ds^2 = dx \cdot dx = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

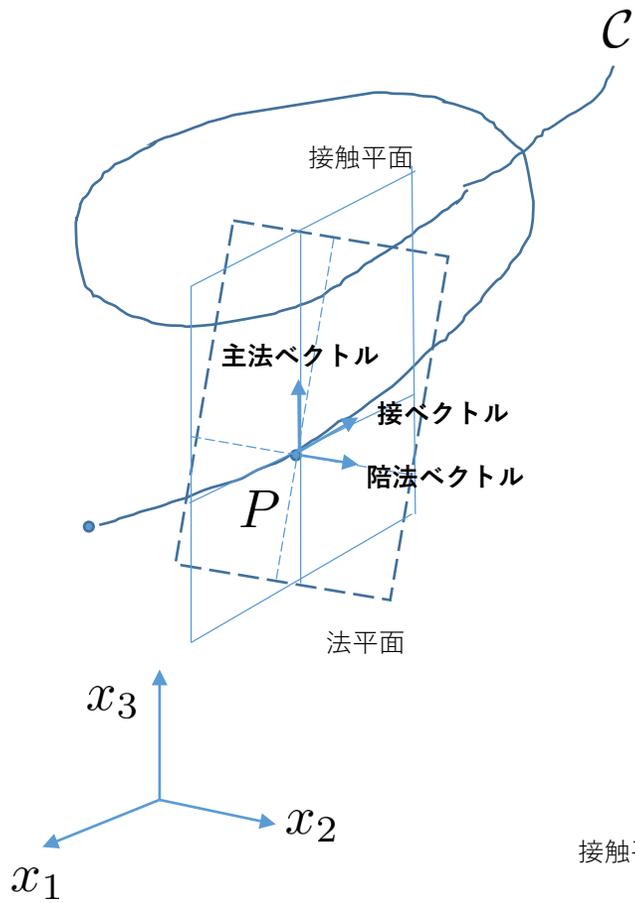
第1基本量

$$E = |x_u|^2, \quad F = 2x_u \cdot x_v, \quad G = |x_v|^2$$

地図と地図帳



空間曲線



接触平面の変動

$$P : x = x(s) \in \mathcal{C}$$

弧長パラメータ

$$t = \frac{dx}{ds}$$

接ベクトル

n 主法ベクトル

b 陪法ベクトル

フレネ・セレの公式

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\rho} n$$

接触平面上の運動

$$\frac{dn}{ds} = -\frac{1}{\rho} t + \tau b$$

$\frac{1}{\rho}$ 曲率

$$\frac{db}{ds} = -\tau n$$

τ 捩率

空間曲線を接触面上の円弧で近似すると曲率が表示される
接ベクトル方向に進むと接触平面が変動する

接触平面の変動は捩率で表示される

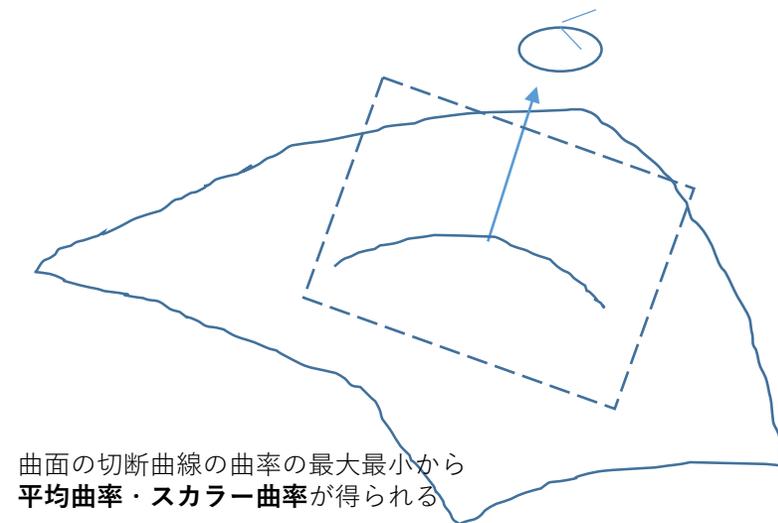
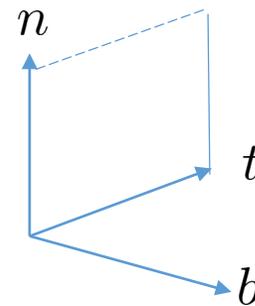
- 直線探索
- 勾配法
- 共役勾配法

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbf{R}^3$$

$$b = t \times n, \quad |b|^2 = 1$$

$$\frac{db}{ds} = \frac{dt}{ds} \times n + t \times \frac{dn}{ds} = t \times \frac{dn}{ds}$$

$$\frac{db}{ds} \cdot b = 0$$



曲面の切断曲線の曲率の最大最小から
平均曲率・スカラー曲率が得られる

第2基本形式

Senba-S. 01	weak formulation monotonicity formula	formation of collapse weak solution generation
Senba-S. 02a	weak solution	instant blowup for over mass concentrated initial data
Kurokiba-Ogawa 03	scaling invariance	non-existence of over mass
Senba-S. 04	backward self-similar transformation scaling limit	entire solution without concentration
S. 05	parabolic envelope (1) scaling invariance of the scaling limit a local second moment	sub-collapse quantization collapse mass quantization
Senba-Ohtsuka-S. 07	defect moment (1)	radially symmetric dynamics
Senba 07, Naito-S. 08	parabolic envelope (2)	type II blowup rate
S. 08	scaling back	limit equation simplification
Senba-S. 11 (2 nd ed.)	translation limit	concentration-cancelation simplification
S. 13a	limit equation classification	boundary blowup exclusion
S. 13b	improved regularity concentration compactness	cloud formation collision of sub-collapses
S. 14	tightness	residual vanishing
S. 18	defect moment (2)	quantization of BUIT
S. 21	outer second moment	residual vanishing in finite time