

「偏微分方程式論における大域解析学の方法, II」

現実世界のモデルである偏微分方程式の研究から、想定外の原理や予測が引き出される事例は枚挙にいとまがない。時間とともに表出する解の空間特異性が止揚され、新しい秩序が形成されることもその一つである。近年の研究により、特異性の解消には 3 つの原理が働くことが明らかになっている。第 1 の原理は場の形成を通じた粒子間の対称的な相互作用であり、そこでは作用反作用の法則が特異性解消を誘導する。第 2 の原理はポアソン構造をもつ異種間の歪対称な相互作用が、複数の保存則の成立を確保することから発生する。第 3 はラグランジュ座標で見た物理量の滑らかな変動を、オイラー座標で見たときに発生する見かけの出来事である。これらの現象は幾何学、物理学、生物学、工学の各分野に広がるが、微分形式とフレームという二つの言語がそれらの解析で共通した役割を果たす。今回は昨年度講義した第 1 原理の俯瞰より始め、第 2 原理を中核としてその様相を解説して、第 3 原理の動機づけを与える。生態系のロバスト性の根源は多様性にある。データサイエンスと統計力学との共通点を注視し、幾何学の言葉を非線形解析学に導入することでそのことを理解する手がかりを与える。

第 1 日「非平衡統計力学の数理モデル」

1. 量子化する爆発機構 (50 分)

- ・ スモールコフスキー・ポアソン方程式
- ・ ボルツマン・ポアソン方程式～定常状態
- ・ 熱平衡
- ・ 循環するハミルトニアン
- ・ 幾何的背景
- ・ 自由粒子の運動
- ・ 爆発解析とスケーリング
- ・ 楕円型統一理論

2. 動的な階層の循環 (40 分)

- ・ 緩和時間の動力学～準平衡から平衡へ
- ・ スモールコフスキー・ポアソン方程式の力学系
- ・ 準備～グリーン関数と弱形式
- ・ ε 正則性と局所化
- ・ コラプスの形成
- ・ 弱解の生成
- ・ 後方自己相似変換

- ・放物包～第1と第2
- ・極限方程式の導出
- ・境界爆発の排除
- ・サブコラプスの生成
- ・スケーリングバック
- ・弱リュービル性～黒木場・小川の定理
- ・スケール不変な正則性
- ・外部2次モーメント～残余項の消滅
- ・サブコラプスの衝突

第2日「場と粒子の双対性」

3. 非平衡熱力学の数理モデル (50分)

- ・ヘルムホルツの自由エネルギー
- ・創発性と爆発レート
- ・全空間の場合
- ・走化性方程式について
- ・マルチスケールモデル
- ・非線形スペクトル力学
- ・時間遅れの影響～量子化の崩壊
- ・トーランド双対
- ・高次元の動力学
- ・高次元の楕円型統一理論

4. 双対変分原理 (30分)

- ・3つの基本系～孤立系、閉じた系、開放系
- ・ミニマリティ・アンフォールディング
- ・非平衡熱力学のモデル～相分離、相転移、記憶形状
- ・フォークモデル～ストリッカーズ評価と極大正則性
- ・熱力学的構造
- ・定常状態と変分汎関数
- ・セミ・ミニマリティ・アンフォールディング
- ・無限小安定と実解析性
- ・分岐解析
- ・気体分子の動力学
- ・圧縮性オイラー方程式
- ・カイネティック形式とハミルトン形式

第3日「統計力学とデータサイエンス」

5. 統計力学とデータサイエンスの基礎概念 (50分)

- ・分布
- ・標本抽出
- ・点推定の基準
- ・最尤推定とベイズ推定
- ・カルバック・ライブラー情報量と相対エントロピー
- ・赤池情報量

6. 孤立系の空間均質化 (30分)

- ・点渦系の平衡統計力学
- ・カオスの伝播と一意性定理
- ・ボルツマン・シャノンエントロピー
- ・ラオエントロピー
- ・散逸反応拡散系
- ・化学反応方程式
- ・相対エントロピーの方法
- ・気体粒子の非平衡統計力学～孤立系の空間均質化
- ・定常解の一意性
- ・古典粒子モデルと量子粒子モデル
- ・3つの方法～双対変分原理、相対エントロピー、勾配不等式

第4日「多種の相互作用」

7. 数理モデリングの基礎 (60分)

- ・状態量の変化
- ・3つの応用
- ・力学系の基礎
- ・反応の次数
- ・質量作用の法則
- ・重合の規則
- ・反応ネットワークの構築
- ・パラメータの同定
- ・最適化の基礎概念
- ・次元解析の方法
- ・骨代謝～動的平衡の崩壊

8. 反応拡散系 (30分)

- ・質量散逸系
- ・ロトカ・ボルテラ方程式系
- ・スモルコフスキー・ポアソン方程式との類似性
- ・エントロピー散逸と軌道のL1コンパクト性

- ・ L1 解の方法
- ・ L2-L1 評価
- ・ 双対法
- ・ フェルナー・モルガン・タンの定理
- ・ 空間 2 次元の場合～時間制御
- ・ 空間 2 次元の場合～空間制御
- ・ 爆発解析～多項式増大の一般論
- ・ 極大単調性と VMO
- ・ Alexandroff-Bakelman-Pucci の不等式
- ・ Krylov-Safanov の不等式
- ・ 空間 3 次元の場合

第 5 日「可積分な多成分系」

9. 積分可能な生命科学モデル (40 分)

- ・ 基底膜分解の機序
- ・ 素過程の記述
- ・ 反応ネットワークの構築
- ・ 反応のグルーピング
- ・ パターン形成
- ・ シャドーシステム
- ・ 遷移状態
- ・ 空間均質化
- ・ ギーラー・マインハルト系

10. 微分形式と消滅定理 (30 分)

- ・ 幾何学の言葉
- ・ 多様体、接続、計量
- ・ 解析力学
- ・ シンプレティック多様体、リー微分、ポアソン多様体
- ・ ハミルトン・ヤコビ理論
- ・ 理論生物学の数理モデル
- ・ 歪対称なロトカ・ボルテラ系
- ・ 非定常マクスウェル方程式の界面消滅
- ・ 面積要素の変数変換
- ・ 可積分系と微分形式

参考文献 (単著、英文)

1. Methods of Geometry in the Theory of Partial Differential Equations, World Scientific

Press, Singapore, 2024.

2. Applied Analysis, Mathematics for Science, Technology, Engineering, 3rd edition, World Scientific Press, Singapore, 2022.
3. Semilinear Elliptic Equations, Classical and Modern Theories, 2nd edition, Gruyter, Berlin, 2020.
4. Chemotaxis, Reaction, Network, World Scientific Press, World Scientific Press, Singapore, 2018.
5. Mean Filed Theories and Dual Variation, 2nd edition, Atlantis Press, Paris, 2015.
6. Free Energy and Self-Interacting Particles, Birhhauser, Boston, 2005.