

2023 年度 非線形現象数理 講義

「偏微分方程式論における幾何学的方法」

現実世界のモデルである偏微分方程式の研究から、想定外の原理や予測が引き出される事例は枚挙にいとまがない。時系列で表出する解の特異性が止揚されて、新しい秩序が形成されることもその一つである。近年の研究により、特異性の解消には 3 つの原理が働くことが明らかになっている。第 1 の原理は場の形成を通じた粒子間の対称的な相互作用であり、そこでは作用反作用の法則が特異性解消を誘導する。第 2 の原理はポアソン構造をもつ異種間の歪対称な相互作用が、複数の保存則の成立を確保することから発生する。第 3 はラグランジュ座標で見た物理量の滑らかな変動を、オイラー座標で見たときに発生する見かけの出来事である。これらの現象は幾何学、物理学、生物学、工学の各分野に広がるが、それぞれスケーリング (第 1)、微分形式 (第 2)、フレーム (第 3) という幾何学の言語によってその本質をつかみ取ることができる。本講義では第 1 の原理に絞ってその様相を解説する。

第 1 日 (50 分) 「生命現象と幾何計量」

第 2 日 (50 分) 「静的な階層循環」

第 3 日 (50 分) 「動的な階層循環」

第 4 日 (50 分) 「動的な階層循環 (続き)」

第 5 日 (50 分) 「拡散幾何」

第 1 日 「生命現象と幾何計量」

1. 生命現象の数理モデリング

- ・ 状態量の変化
- ・ 素過程の記述
- ・ ミカエリス・メンテンの式
- ・ 反応ネットワークの構築
- ・ ケルマック・マッケンドリックモデルの数学解析
- ・ 空間分布、マルチスケール表現
- ・ 昆虫は樹液にたどり着く
- ・ 勾配
- ・ 流束

2. 自己組織化のポテンシャル

- ・ 走化性方程式
- ・ モデルの簡略化
- ・ 非平衡統計力学
- ・ 非線形スペクトル力学
- ・ 循環するハミルトニアン

- ・有限時間・無限時間爆発の量子化

3. 幾何学の言葉

- ・曲線のパラメータ表示
- ・曲面のパラメータ表示
- ・空間曲線
- ・研究史

第2日「静的な階層循環」

4. ボルツマン・ポアソン方程式

- ・渦度場方程式
- ・オンサーガーの予言
- ・平均場方程式の導出
- ・カオスの伝播と一意性定理
- ・循環するハミルトニアン
- ・研究史
- ・リュービル積分
- ・球面導関数と被覆の量子化 $\sim 8\pi$ について
- ・爆発解析の導入
- ・リュービル性 \sim 再び 8π について
- ・モース指数の対応
- ・非退化性の証明
- ・未解決問題
- ・多強度渦度場モデル
- ・決定論モデルの TM 不等式
- ・双対変数への変換
- ・一般化確率モデルでの階層循環

第3日「動的な階層循環」

5. 非平衡統計力学のモデル

- ・ボルツマン・ポアソン方程式再説
- ・熱平衡
- ・準平衡から平衡へ
- ・点渦動的な平均場モデル
- ・スモルコフスキー・ポアソン方程式
- ・統計集団と非平衡熱力学
- ・場と粒子の双対性
- ・トーランド双対
- ・基本構造

- ・ スケーリング～3 たび 8π について
- ・ グリーン関数の対称性と弱形式
- ・ ε 正則性
- ・ 局所化
- ・ コラプスの形成
- ・ 弱解の生成
- ・ 後方自己相似変換
- ・ 第 1 放物包
- ・ 第 2 放物包
- ・ 弱スケール極限
- ・ 境界爆発点の消滅
- ・ スケーリングバック
- ・ 弱リュービル性～黒木場・小川の定理

第 4 日「動的な階層循環 (続き)」

6. スモフコフスキー・ポアソン方程式 (続き)

- ・ 前方スケーリングと弱スケール極限の特異部分
- ・ 連続部分消滅の原理
- ・ スケール不変な ε 正則性
- ・ 外側 2 次モーメント
- ・ サブコラプスの衝突～再び循環するハミルトニアン
- ・ 自由エネルギーの有界性とコラプスの単純性、特に創発性について

7. 無限時間での挙動

- ・ 無限時間爆発の量子化
- ・ 弱極限
- ・ 欠損モーメントと連続部分の消滅、第 1 体積公式の適用
- ・ コラプスの運動～3 たび循環するハミルトニアン
- ・ 勾配不等式と連結軌道～楕円型一様化理論に向けて

8. スモフコフスキー・ポアソン方程式 (補足)

- ・ 全空間の力学系
- ・ 再び走化性方程式について
- ・ 緩和時間がある場合
- ・ 場と粒子の双対性
- ・ 高次元の量子化
- ・ 一様化楕円型理論に向けて

第 5 日「拡散幾何」

9. 2D 正規化リッチ流

- ・ポアンカレ予想とリッチ流
- ・2D-NRF について
- ・ハミルトンの定理と定常解の分類
- ・幾何的議論の分析
- ・解析的表現、解析的手法
- ・力学系の観点から
- ・対数拡散、モデルB方程式
- ・ベニランの不等式
- ・大域解の存在～劣臨界と臨界について
- ・確率測度の集中、集中関数とビタリの被覆定理
- ・軌道のコンパクト性
- ・モーザーの反復スキーム
- ・定常解への収束とLS不等式
- ・臨界多様体の理論
- ・収束のレート
- ・定常解の非退化性
- ・2D-NRF の場合～中心多様体の消滅

参考書（単著、英文）

1. Methods of Geometry in the Theory of Partial Differential Equations, World Scientific Press, Singapore, 2024.
2. Applied Analysis, Mathematics for Science, Technology, Engineering, 3rd edition, World Scientific Press, Singapore, 2022.
3. Semilinear Elliptic Equations, Classical and Modern Theories, 2nd edition, Gruyter, Berlin, 2020.
4. Chemotaxis, Reaction, Network, World Scientific Press, World Scientific Press, Singapore, 2018.
5. Mean Filed Theories and Dual Variation, 2nd edition, Atlantis Press, Paris, 2015.
6. Free Energy and Self-Interacting Particles, Birkhauser, Boston, 2005.