

最適形状設計問題における評価関数の 2 階形状 微分と Newton 法

畔上 秀幸

名古屋大学 情報科学研究科

統計数理研究所 数学協働プログラム
ワークショップ 工学と現代数学の接点を求めて (1),
大阪大学数理・データ科学教育研究センター (MMDS),
2015 年 12 月 22 日-24 日

§1 はじめに

領域変動型の形状最適化問題

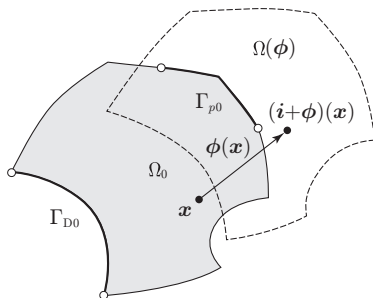


図 1.1: $d \in \{2, 3\}$ 次元の初期領域 $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ と領域変動 $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$

§1 はじめに (cnt.)

密度変動型の位相最適化問題

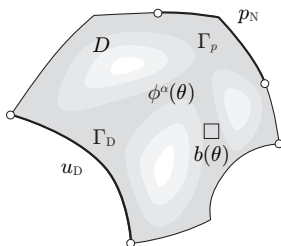


図 1.2: $d \in \{2, 3\}$ 次元の固定領域 D と密度変動 $\phi(\theta)$, $\theta : D \rightarrow \mathbb{R}$

§1.1 目的

目的

- ① 簡単な最適設計問題をつかって，勾配法と Newton 法とはどのような方法かを復習する。
- ② 線形弾性体と Stokes 流れ場の密度型位相最適化問題における評価関数の 2 階 θ 微分をもとめてみる。
- ③ 線形弾性体と Stokes 流れ場の領域変動型形状最適化問題で定義された評価関数の 2 階形状微分をもとめてみる。
- ④ それらを使った H^1 Newton 法はうまくいくのかについて，これまでにえられた結果をもとに考える。

§2 勾配法と Newton 法とはどのような方法か

- ① 2 つの断面積をもつ 1 次元線形弾性体の最適設計問題を定義する。
- ② 評価関数の断面積微分と 2 階断面積微分 (Hesse 行列) を **代入法** でもとめてみる。
- ③ 評価関数の断面積微分と 2 階断面積微分 (Hesse 行列) を **Lagrange 乗数法** (随伴変数法) でもとめてみる。
- ④ 逐次 2 次近似法 (**勾配法**) で最適解をもとめてみる。
- ⑤ 制約付問題に対する **Newton 法** で最適解をもとめてみる。

§2.1 最適設計問題

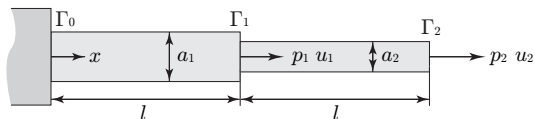


図 2.1: 2つの断面積をもつ 1次元線形弾性体

$$\frac{eY}{l} \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -a_2 \\ -a_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

§2.1 最適設計問題 (cnt.)

問題 2.1 (2 段 1 次元弾性問題)

図 2.1 の 1 次元線形弾性体に対して, 正定数 l および $e_Y, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ および $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ が与えられたとき,

$$\mathbf{K}(\mathbf{a}) \mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (2.2)$$

を満たす $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ を求めよ. ただし, 式 (2.2) は式 (2.1) をあらわすことにする.

状態変数を求める問題を主問題とよぶことにする. また, 問題 2.1 に対して

$$\mathcal{L}_M(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (-\mathbf{K}(\mathbf{a}) \mathbf{u} + \mathbf{p}) \quad (2.3)$$

を主問題に対する Lagrange 関数 とよぶことにする.

§2.1 最適設計問題 (cnt.)

主問題 2.1 の解 \mathbf{u} に対して

$$f_0(\mathbf{u}) = (p_1 \quad p_2) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \quad (2.4)$$

を平均コンプライアンスとよぶ。それに対して

$$f_1(\mathbf{a}) = l(a_1 + a_2) - c_1 = (l \quad l) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - c_1 \quad (2.5)$$

は体積制約関数よぶ。ただし、 c_1 を体積の上限値を与える正定数とする。

§2.1 最適設計問題 (cnt.)

設計変数の入る線形空間を $X = \mathbb{R}^2$ とおき、さらに、設計集合を

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{a} \in X \mid \mathbf{a} \geq \mathbf{a}_0\} \quad (2.6)$$

とおく。ただし、 $\mathbf{a}_0 = (a_{01}, a_{02})^T > \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ を定数ベクトルとする。また、状態変数の入る線形空間を $U = \mathbb{R}^2$ とおく。

問題 2.2 (平均コンプライアンス最小化問題)

$X = \mathbb{R}^2$ および $U = \mathbb{R}^2$ とおく。このとき、

$$\min_{\mathbf{a} \in \mathcal{D}} \{f_0(\mathbf{u}) \mid f_1(\mathbf{a}) \leq 0, \mathbf{u} \in U, \text{問題 2.1}\}$$

を満たす \mathbf{a} を求めよ。

§2.1 最適設計問題 (cnt.)

例題 2.1 (平均コンプライアンス最小化問題の数値例)

問題 2.2 において $l = 1$, $e_Y = 1$, $c_1 = 1$, $\mathbf{p} = (1, 1)^T$, $\mathbf{a}_0 = (0.1, 0.1)^T$ とおいて, \mathbf{a} の最小点を求めよ.

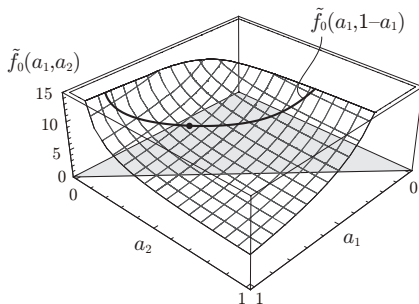


図 2.2: 状態方程式を満たす設計変数の集合における平均コンプライアンス

§2.1 最適設計問題 (cnt.)

f_1 の断面積微分は

$$f_{1\mathbf{a}} = \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ l \end{pmatrix} = \mathbf{g}_1 \quad (2.7)$$

のように計算される。さらに, Hesse 行列は

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{f}_1}{\partial a_1 \partial a_1} & \frac{\partial^2 \tilde{f}_1}{\partial a_1 \partial a_2} \\ \frac{\partial^2 \tilde{f}_1}{\partial a_2 \partial a_1} & \frac{\partial^2 \tilde{f}_1}{\partial a_2 \partial a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial a_1} & \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial a_2} \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2 \times 2} \quad (2.8)$$

となる。

一方, f_0 の断面積微分と Hesse 行列をもとめるためには, f_0 に主問題の解の変動が考慮されなければならない。

§2.2 代入法

状態方程式 (式 (2.2)) の解は

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{a}) \mathbf{p} = \frac{l}{e_Y} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \frac{l}{e_Y} \begin{pmatrix} \frac{p_1+p_2}{a_1} \\ \frac{p_1+p_2}{a_1} + \frac{p_2}{a_2} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

となる。そこで、 $f_0(\mathbf{u}(\mathbf{a}))$ を $\tilde{f}_0(\mathbf{a})$ とかくことにすれば、

$$\tilde{f}_0(\mathbf{a}) = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{a}) \mathbf{p}) = \frac{l}{e_Y} \left(\frac{(p_1 + p_2)^2}{a_1} + \frac{p_2^2}{a_2} \right) \quad (2.10)$$

がえられる。この \tilde{f}_0 をもちいれば、

$$\mathbf{g}_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}_0}{\partial a_1} \\ \frac{\partial \tilde{f}_0}{\partial a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{K}^{-1}}{\partial a_1} \mathbf{p} \right) \\ \mathbf{p} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{K}^{-1}}{\partial a_2} \mathbf{p} \right) \end{pmatrix} = \frac{l}{e_Y} \begin{pmatrix} -\frac{(p_1+p_2)^2}{a_1^2} \\ -\frac{p_2^2}{a_2^2} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

§2.2 代入法 (cnt.)

がえられる。さらに, Hesse 行列は

$$\begin{aligned}
 H_0 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{f}_0}{\partial a_1 \partial a_1} & \frac{\partial^2 \tilde{f}_0}{\partial a_1 \partial a_2} \\ \frac{\partial^2 \tilde{f}_0}{\partial a_2 \partial a_1} & \frac{\partial^2 \tilde{f}_0}{\partial a_2 \partial a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}_0}{\partial a_1} & \frac{\partial \mathbf{g}_0}{\partial a_2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \mathbf{p} \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathbf{K}^{-1}}{\partial a_1 \partial a_1} \mathbf{p} \right) & \mathbf{p} \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathbf{K}^{-1}}{\partial a_1 \partial a_2} \mathbf{p} \right) \\ \mathbf{p} \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathbf{K}^{-1}}{\partial a_1 \partial a_2} \mathbf{p} \right) & \mathbf{p} \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathbf{K}^{-1}}{\partial a_2 \partial a_2} \mathbf{p} \right) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{l}{e_Y} \begin{pmatrix} \frac{2(p_1+p_2)^2}{a_1^3} & 0 \\ 0 & \frac{2p_2^2}{a_2^3} \end{pmatrix} \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

となる。 $a_1, a_2 > 0$ のとき, H_0 は正定値となる。

§2.3 随伴変数法

f_0 の評価関数に対する Lagrange 関数を

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) &= f_0(\mathbf{u}) + \mathcal{L}_M(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) \\ &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{K}(\mathbf{a})\mathbf{u} - \mathbf{p})\end{aligned}\tag{2.13}$$

とおく.

§2.3 随伴変数法 (cnt.)

$(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)$ の任意変動 $(\mathbf{b}, \mathbf{u}', \mathbf{v}'_0) \in X \times U \times U$ に対する \mathcal{L}_0 の微分 (全微分) は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_0(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{b}, \mathbf{u}', \mathbf{v}'_0] &= \mathcal{L}_{0\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{b}] \\ &\quad + \mathcal{L}_{0\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{u}'] + \mathcal{L}_{0\mathbf{v}_0}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{v}'_0] \end{aligned} \quad (2.14)$$

となる. 式 (2.14) の右辺第 3 項は,

$$\mathcal{L}_{0\mathbf{v}_0}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{v}'_0] = \mathcal{L}_M(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}'_0) \quad (2.15)$$

となる. 式 (2.15) は主問題 (問題 2.1) に対する Lagrange 関数になっている. そこで, \mathbf{u} が主問題の解ならば, 式 (2.14) の右辺第 3 項は 0 となる.

§2.3 随伴変数法 (cnt.)

また、式 (2.14) の右辺第 2 項は、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{0u}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{u}'] &= f_{0u}(\mathbf{u})[\mathbf{u}'] - \mathcal{L}_{Mu}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{u}'] \\ &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}' - \mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{K}(\mathbf{a}) \mathbf{u}') = \mathbf{u}' \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{K}^T(\mathbf{a}) \mathbf{v}_0)\end{aligned}\quad (2.16)$$

となる。ここで、任意の $\mathbf{u}' \in U$ に対して式 (2.16) が 0 となるように \mathbf{v}_0 が決定できれば、式 (2.14) の右辺第 2 項も 0 となる。この条件は、次の**随伴問題**の解を \mathbf{v}_0 とおくことと同値である。

§2.3 随伴変数法 (cnt.)

問題 2.3 (f_0 に対する随伴問題)

$K(a)$ と p を問題 2.1 のとおりとする。このとき,

$$K^T(a) v_0 = p \quad (2.17)$$

をみたす $v_0 \in U$ をもとめよ。

問題 2.1 と問題 2.3 を比較すれば、 $K^T = K$ がなりたつことから、
自己随伴関係

$$v_0 = u \quad (2.18)$$

がえられる。

§2.3 随伴変数法 (cnt.)

さらに、式 (2.14) の右辺第 1 項は、

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{0a}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{b}] &= - \left\{ \mathbf{v}_0 \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{a})}{\partial a_1} \mathbf{u} \quad \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{a})}{\partial a_2} \mathbf{u} \right) \right\} \mathbf{b} \\
 &= - \frac{e_Y}{l} \left\{ (v_{01} \quad v_{02}) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right) \right\} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\
 &= - \frac{e_Y}{l} (v_{01} \quad v_{02}) \begin{pmatrix} u_1 & u_1 - u_2 \\ 0 & u_2 - u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\
 &= - \frac{e_Y}{l} (u_1 v_{01} \quad (u_2 - u_1)(v_{02} - v_{01})) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\
 &= l (-\sigma(u_1) \varepsilon(v_{01}) \quad -\sigma(u_2 - u_1) \varepsilon(v_{02} - v_{01})) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\
 &= \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{b}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

となる。ここで、 \mathbf{g}_0 は直接微分法による結果と一致する。

§2.3 随伴変数法 (cnt.)

(\mathbf{a}, \mathbf{u}) の任意変動 $(\mathbf{b}_1, \mathbf{u}'_1) \in X \times U$ と $(\mathbf{b}_2, \mathbf{u}'_2) \in X \times U$ に対する Lagrange 関数 \mathcal{L}_0 の 2 階微分は,

$$\begin{aligned}
 & h_{\mathcal{L}_0}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[(\mathbf{b}_1, \mathbf{u}'_1), (\mathbf{b}_2, \mathbf{u}'_2)] \\
 &= (\mathcal{L}_{0a}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{b}_1] + \mathcal{L}_{0u}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{u}'_1])_a[\mathbf{b}_2] \\
 &\quad + (\mathcal{L}_{0a}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{b}_1] + \mathcal{L}_{0u}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{u}'_1])_u[\mathbf{u}'_2] \\
 &= (f_{0u} \cdot \mathbf{u}'_1 + \mathcal{L}_{Ma}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{b}_1] + \mathcal{L}_{Mu}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{u}'_1])_a[\mathbf{b}_2] \\
 &\quad + (f_{0u} \cdot \mathbf{u}'_1 + \mathcal{L}_{Ma}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{b}_1] + \mathcal{L}_{Mu}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{u}'_1])_u[\mathbf{u}'_2] \\
 &= \begin{pmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{u}'_2 \end{pmatrix} \cdot \left(\mathbf{H}_{\mathcal{L}_M} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{u}'_1 \end{pmatrix} \right) \tag{2.20}
 \end{aligned}$$

となる。ここで,

$$\mathbf{H}_{\mathcal{L}_M} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{Maa} & \mathcal{L}_{Mau} \\ \mathcal{L}_{Mua} & \mathcal{L}_{Muu} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} & \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0^T \mathbf{K}_{a_1} \\ \mathbf{v}_0^T \mathbf{K}_{a_2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{a_1}^T \mathbf{v}_0 & \mathbf{K}_{a_2}^T \mathbf{v}_0 \end{pmatrix} & \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

§2.3 随伴変数法 (cnt.)

となる. 式 (2.21) から, $\mathbf{H}_{\mathcal{L}_M}$ は正定値行列とは限らないことがわかる.

§2.3 随伴変数法 (cnt.)

ここで、 u と v_0 を設計変数 a のときの主問題 (問題 2.1) と随伴問題 (問題 2.3) の解として、 u' を a の任意変動 $b \in X$ に対して主問題の等式制約がみたされたもとの u の変動であると仮定する。このとき、状態方程式の断面積微分より、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_M(a, u, v) [b, u'(a) [b]] \\ = v \cdot \{ -(\mathbf{K}'(a) [b]) u - \mathbf{K}(a) (u'(a) [b]) \} = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

より

$$u'(a) [b] = -\mathbf{K}^{-1}(a) (\mathbf{K}'(a) [b]) = \begin{pmatrix} -\frac{u_1}{a_1} & 0 \\ -\frac{u_1}{a_1} & -\frac{u_2 - u_1}{a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

がえられる。

§2.3 随伴変数法 (cnt.)

さらに自己随伴関係をもちいれば，式 (2.20) は

$$\begin{aligned}
 h_{\mathcal{L}_0}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) & [(\mathbf{b}_1, \mathbf{u}'_1(\mathbf{a})[\mathbf{b}_1]), (\mathbf{b}_2, \mathbf{u}'_2(\mathbf{a})[\mathbf{b}_2])] \\
 & = \mathcal{L}_{\text{Mau}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{b}_1, \mathbf{u}'(\mathbf{a})[\mathbf{b}_2]] + \mathcal{L}_{\text{Mua}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{b}_1, \mathbf{u}'(\mathbf{a})[\mathbf{b}_2]] \\
 & = - \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0^T \mathbf{K}_{a_1} \\ \mathbf{v}_0^T \mathbf{K}_{a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{u_1}{a_1} & 0 \\ -\frac{u_1}{a_1} & -\frac{u_2 - u_1}{a_2} \end{pmatrix} \right. \\
 & \quad \left. + \left(\begin{pmatrix} \mathbf{v}_0^T \mathbf{K}_{a_1} \\ \mathbf{v}_0^T \mathbf{K}_{a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{u_1}{a_1} & 0 \\ -\frac{u_1}{a_1} & -\frac{u_2 - u_1}{a_2} \end{pmatrix} \right)^T \right\} \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \end{pmatrix} \\
 & = \mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{H}_0 \mathbf{b}_2)
 \end{aligned}$$

となる．この結果から， \tilde{f}_0 の 2 階断面微分

$$h_0(\mathbf{a})[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] = \mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{H}_0 \mathbf{b}_2) \quad (2.24)$$

がえられる．ここで， \mathbf{H}_0 は代入法でえられた結果と一致する．

§2.4 勾配法

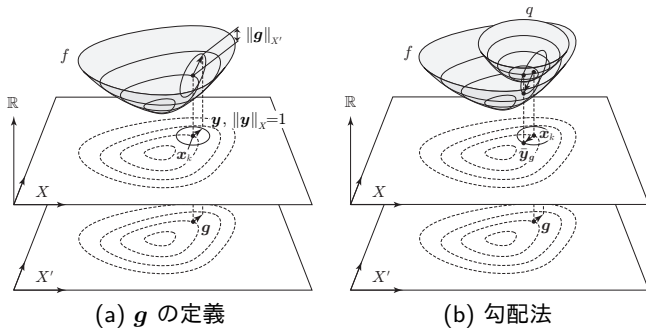


図 2.3: g の定義と勾配法

§2.4 勾配法 (cnt.)

f を x_k の周りで Taylor 展開すれば,

$$f(x_k + \mathbf{y}) = f(x_k) + \mathbf{g} \cdot \mathbf{y} + o(\|\mathbf{y}\|_X) \quad (2.25)$$

となる. ここで, \mathbf{g} は X の双対空間 X' の要素で, \mathbf{g} の大きさ (ノルム) は

$$\|\mathbf{g}\|_{X'} = \max_{\mathbf{y} \in X} \frac{|\langle \mathbf{g}, \mathbf{y} \rangle_{X' \times X}|}{\|\mathbf{y}\|_X} = \max_{\mathbf{y} \in X, \|\mathbf{y}\|_X = 1} |\langle \mathbf{g}, \mathbf{y} \rangle_{X' \times X}|$$

で定義される. $X = \mathbb{R}^d$ の場合は $X' = \mathbb{R}^d$ および双対積 $\langle \mathbf{g}, \mathbf{y} \rangle_{X' \times X} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{y}$ となる.

§2.4 勾配法 (cnt.)

これらの関係より、 g は f が最も増加する方向を向いていることになる。そこで、有限次元ベクトル空間では $X = X'$ がなりたつことから、

$$\bar{y}_g = -g \tag{2.26}$$

のように $\bar{y}_g \in X$ を選べば、

$$f(x_k + \bar{y}_g) - f(x_k) = -\|\bar{y}_g\|_X^2 + o(\|\bar{y}_g\|_X)$$

となる。ここで、 $\|\bar{y}_g\|_X$ が十分小さければ、 f が減少することになる。

§2.4 勾配法 (cnt.)

問題 2.4 (勾配法)

$X = \mathbb{R}^d$ とする. $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ を正定値実対称行列とする. $f \in C^1(X; \mathbb{R})$ に対して, 極小点ではない $x_k \in X$ における f の勾配を $g(x_k) \in X' = \mathbb{R}^d$ とする. このとき, 任意の $y \in X$ に対して

$$\bar{y}_g \cdot (Ay) = -g(x_k) \cdot y \quad (2.27)$$

をみたす $\bar{y}_g \in X$ をもとめよ.

式 (2.27) は, 任意の $y \in X$ との内積をもちいた表現になっている. この方程式は,

$$\bar{y}_g = -A^{-1}g \quad (2.28)$$

によって \bar{y}_g をもとめることと同値である.

§2.4 勾配法 (cnt.)

定理 2.1 (勾配法)

問題 2.4 の解 $\bar{\mathbf{y}}_g$ は f の x_k における降下方向である.

(証明) A は正定値実対称行列なので, ある正定値 α が存在して, 任意の $\mathbf{y} \in X$ に対して

$$\mathbf{y} \cdot (A\mathbf{y}) \geq \alpha \|\mathbf{y}\|_X^2, \quad A = A^T$$

がなりたつ. この関係と式 (2.27) をもちいれば, 正の定数 $\bar{\epsilon}$ に対して,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_k + \bar{\epsilon}\bar{\mathbf{y}}_g) - f(\mathbf{x}_k) &= \bar{\epsilon}\bar{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{y}}_g + o(\bar{\epsilon}) = -\bar{\epsilon}\bar{\mathbf{y}}_g \cdot (A\bar{\mathbf{y}}_g) + o(\bar{\epsilon}) \\ &\leq -\bar{\epsilon}\alpha \|\bar{\mathbf{y}}_g\|_X^2 + o(\bar{\epsilon}) \end{aligned}$$

がなりたつ. ここで, $\bar{\epsilon}$ が十分小さければ, f は減少することになる.

□

§2.4 勾配法 (cnt.)

問題 2.4 は,

$$q(\bar{\mathbf{y}}_g) = \min_{\mathbf{y} \in X} \left\{ q(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \mathbf{y} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{y}) + \mathbf{g} \cdot \mathbf{y} + f(\mathbf{x}_k) \right\} \quad (2.29)$$

をみたす $\bar{\mathbf{y}}_g \in X$ をもとめることと同値である.

§2.4 勾配法 (cnt.)

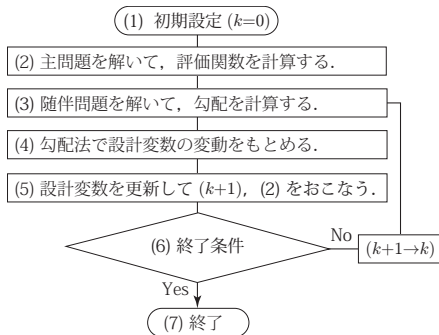


図 2.4: 勾配法のアルゴリズム

§2.4 勾配法 (cnt.)

問題 2.5 (逐次 2 次近似問題)

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ をある正定値実対称行列, c_a を正の定数とする. $\mathbf{x}_k \in S$ において $f_0(\mathbf{x}_k), f_{i_1}(\mathbf{x}_k) = 0, \dots, f_{i_{|I_A|}}(\mathbf{x}_k) = 0, \mathbf{g}_0(\mathbf{x}_k), \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{x}_k), \dots, \mathbf{g}_{i_{|I_A|}}(\mathbf{x}_k)$ があたえられたとき,

$$q(\mathbf{y}_g) = \min_{\mathbf{y} \in X} \left\{ q(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \mathbf{y} \cdot (c_a \mathbf{A} \mathbf{y}) + \mathbf{g}_0(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{y} + f_0(\mathbf{x}_k) \right. \\ \left. f_i(\mathbf{x}_k) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{y} \leq 0 \text{ for } i \in I_A(\mathbf{x}_k) \right\}$$

をみたす $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{y}_g$ をもとめよ.

§2.4 勾配法 (cnt.)

問題 2.5 の Lagrange 関数を,

$$\mathcal{L}_S(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}) = q(\mathbf{y}) + \sum_{i \in I_A(\mathbf{x}_k)} \lambda_{i k+1} (f_i(\mathbf{x}_k) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{y}) \quad (2.30)$$

とおく. 問題 2.5 の最小点 \mathbf{y}_g における KKT 条件は

$$c_a \mathbf{A} \mathbf{y}_g + \mathbf{g}_0(\mathbf{x}_k) + \sum_{i \in I_A(\mathbf{x}_k)} \lambda_{i k+1} \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0}_{X'}, \quad (2.31)$$

$$f_i(\mathbf{x}_k) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{y}_g \leq 0 \quad \text{for } i \in I_A(\mathbf{x}_k), \quad (2.32)$$

$$\lambda_{i k+1} (f_i(\mathbf{x}_k) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{y}_g) = 0 \quad \text{for } i \in I_A(\mathbf{x}_k), \quad (2.33)$$

$$\lambda_{i k+1} \geq 0 \quad \text{for } i \in I_A(\mathbf{x}_k) \quad (2.34)$$

となる.

§2.4 勾配法 (cnt.)

すべての $i \in I_A(\mathbf{x}_k)$ に対して, 不等式制約が有効であると仮定すれば, 式 (2.31) と式 (2.32) は

$$\begin{pmatrix} c_a \mathbf{A} & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G} & \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{|I_A|} \times |I_A|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_g \\ \boldsymbol{\lambda}_{k+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{g}_0 \\ (f_i)_{i \in I_A} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

となる. ただし,

$$\mathbf{G}^T = \left(\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{x}_k), \dots, \mathbf{g}_{i_{|I_A(\mathbf{x}_k)|}}(\mathbf{x}_k) \right)$$

とする. ここで, $\mathbf{g}_{i_1}, \dots, \mathbf{g}_{i_{|I_A|}}$ が 1 次独立であれば, 式 (2.35) は $(\mathbf{y}_g, \boldsymbol{\lambda}_{k+1})$ について可解となる.

§2.4 勾配法 (cnt.)

$g_0, g_{i_1}, \dots, g_{i_{|I_A|}}$ をもちいて, 個別に勾配法を適用する方法も考えられる. すなわち,

$$\mathbf{y}_{gi} = - (c_a \mathbf{A})^{-1} \mathbf{g}_i \quad (2.36)$$

がみたされるように $\mathbf{y}_{g0}, \mathbf{y}_{gi_1}, \dots, \mathbf{y}_{gi_{|I_A|}}$ をもとめる. ここで, Lagrange 乗数 $\lambda_{k+1} \in \mathbb{R}^{|I_A|}$ を未知数として,

$$\mathbf{y}_g = \mathbf{y}_g(\lambda_{k+1}) = \mathbf{y}_{g0} + \sum_{i \in I_A(\mathbf{x}_k)} \lambda_{i k+1} \mathbf{y}_{gi} \quad (2.37)$$

とおく. このとき, \mathbf{y}_g は式 (2.35) の 1 行目をみたすことになる. 一方, 式 (2.35) の 2 行目は

§2.4 勾配法 (cnt.)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_{i_1} \cdot \mathbf{y}_{g_{i_1}} & \cdots & \mathbf{g}_{i_1} \cdot \mathbf{y}_{g_{i_{|I_A|}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{g}_{i_{|I_A|}} \cdot \mathbf{y}_{g_{i_1}} & \cdots & \mathbf{g}_{i_{|I_A|}} \cdot \mathbf{y}_{g_{i_{|I_A|}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{i_1}^{k+1} \\ \vdots \\ \lambda_{i_{|I_A|}}^{k+1} \end{pmatrix} \\ = - \begin{pmatrix} f_{i_1} + \mathbf{g}_{i_1} \cdot \mathbf{y}_{g_0} \\ \vdots \\ f_{i_{|I_A|}} + \mathbf{g}_{i_{|I_A|}} \cdot \mathbf{y}_{g_0} \end{pmatrix}$$

となる。この式を

$$(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{y}_{g_j})_{(i,j) \in I_A^2} (\lambda_j^{k+1})_{j \in I_A} = - (f_i + \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{y}_{g_0})_{i \in I_A} \quad (2.38)$$

とかくことにする。

§2.4 勾配法 (cnt.)

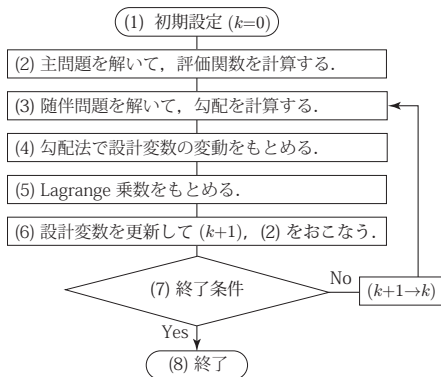


図 2.5: パラメータ調整なし逐次 2 次近似法のアルゴリズム

§2.4 勾配法 (cnt.)

例題 2.2 (平均コンプライアンス最小化問題の数値例)

例題 2.1 に対して、初期点を $\mathbf{a}_{(0)} = (1/2, 1/2)^T$ とおき、試行点をもとめよ。

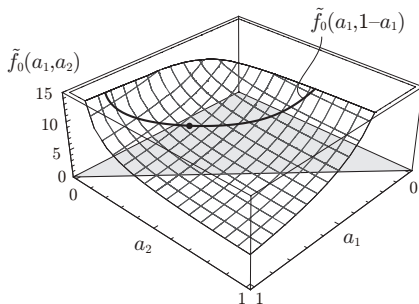


図 2.6: 状態方程式を満たす設計変数の集合における平均コンプライアンス

§2.4 勾配法 (cnt.)

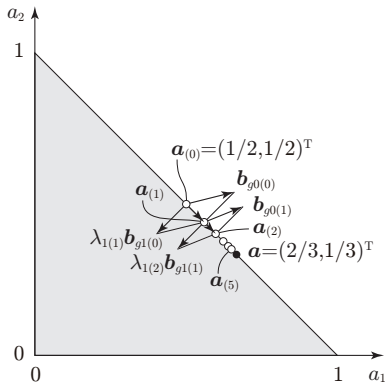
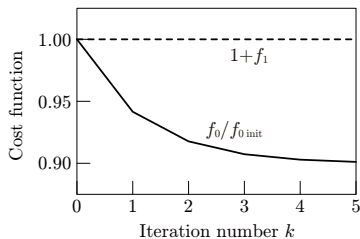


図 2.7: 逐次 2 次近似法による数値例 : 試行点の推移

§2.4 勾配法 (cnt.)



(b) 評価関数の履歴

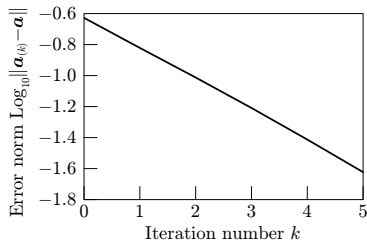
(c) 最小点からの距離 $\|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}\|_{\mathbb{R}^2}$

図 2.8: 逐次 2 次近似法による数値例 (つづき)

§2.4 勾配法 (cnt.)

例題 2.3 (体積最小化問題の数値例)

目的関数と制約関数をそれぞれ

$$f_0(\mathbf{a}) = a_1 + a_2, \quad (2.39)$$

$$\tilde{f}_1(\mathbf{a}) = \frac{4}{a_1} + \frac{1}{a_2} - 9 \quad (2.40)$$

とおく. このとき, $\tilde{f}_1(\mathbf{a}) \leq 0$ をみたす制約のもとで $f_0(\mathbf{a})$ を最小化する問題 (平均コンプライアンス制約つき体積最小化問題) に対して, 初期点を $\mathbf{a}_{(0)} = (16/31, 4/5)^T \approx (0.516, 0.8)^T$ とおき, 試行点をもとめよ.

§2.4 勾配法 (cnt.)

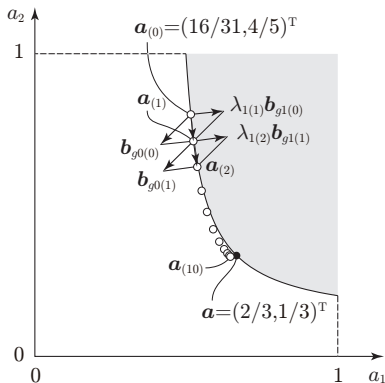
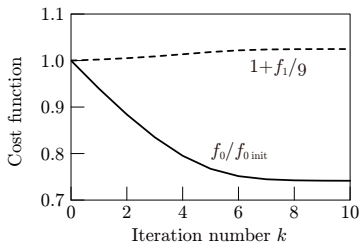


図 2.9: 逐次 2 次近似法による体積最小化問題の数値例：試行点の推移

§2.4 勾配法 (cnt.)



(b) 評価関数の履歴

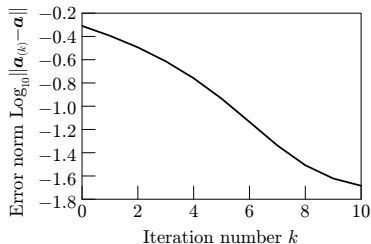
(c) 最小点からの距離 $\|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}\|_{\mathbb{R}^2}$

図 2.10: 逐次 2 次近似法による体積最小化問題の数値例

§2.5 Newton 法

g の x_k まわりの Taylor 展開

$$g(x_k + y_g) = g(x_k) + H(x_k) y_g + o(\|y_g\|_X)$$

において, $o(\|y_g\|_X)$ を無視し,

$$g(x_k + y_g) = g(x_k) + H(x_k) y_g = \mathbf{0}_{X'} \quad (2.41)$$

とおく. Newton 法は式 (2.41) より $y_g \in X$ をもとめる方法である.

§2.5 Newton 法 (cnt.)

問題 2.6 (Newton 法)

$X = \mathbb{R}^d$ とする. $\mathbf{x}_k \in X$ における f の勾配 $\mathbf{g}(\mathbf{x}_k)$ と Hesse 行列 $\mathbf{H}(\mathbf{x}_k)$ を既知とする. このとき, 任意の $\mathbf{y} \in X$ に対して

$$\mathbf{y}_g \cdot (\mathbf{H}(\mathbf{x}_k) \mathbf{y}) = -\mathbf{g}(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{y} \quad (2.42)$$

をみたすように $\mathbf{y}_g \in X$ をもとめよ.

式 (2.42) は

$$h(\mathbf{y}_g, \mathbf{y}) = -\langle \mathbf{g}(\mathbf{x}_k), \mathbf{y} \rangle$$

ともかける.

§2.5 Newton 法 (cnt.)

問題 2.7 (評価関数の Hesse 行列をもちいた 2 次近似問題)

$f_0(\mathbf{x}_k)$, $f_{i_1}(\mathbf{x}_k) = 0, \dots, f_{i_{|I_A|}}(\mathbf{x}_k) = 0$ および $\mathbf{g}_0(\mathbf{x}_k)$, $\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{x}_k), \dots, \mathbf{g}_{i_{|I_A|}}(\mathbf{x}_k)$ と $\mathbf{H}_0(\mathbf{x}_k)$, $\mathbf{H}_{i_1}(\mathbf{x}_k), \dots, \mathbf{H}_{i_{|I_A|}}(\mathbf{x}_k)$ を既知として,

$$\mathbf{H}_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{H}_0(\mathbf{x}_k) + \sum_{i \in I_A(\mathbf{x}_k)} \lambda_{ik} \mathbf{H}_i(\mathbf{x}_k) \quad (2.43)$$

とおく. このとき,

$$q(\mathbf{y}_g) = \min_{\mathbf{y} \in X} \left\{ q(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \mathbf{y} \cdot (\mathbf{H}_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}_k) \mathbf{y}) + \mathbf{g}_0(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{y} + f_0(\mathbf{x}_k) \right. \\ \left. f_i(\mathbf{x}_k) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{y} \leq 0 \text{ for } i \in I_A(\mathbf{x}_k) \right\}$$

をみたす $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{y}_g$ をもとめよ.

§2.5 Newton 法 (cnt.)

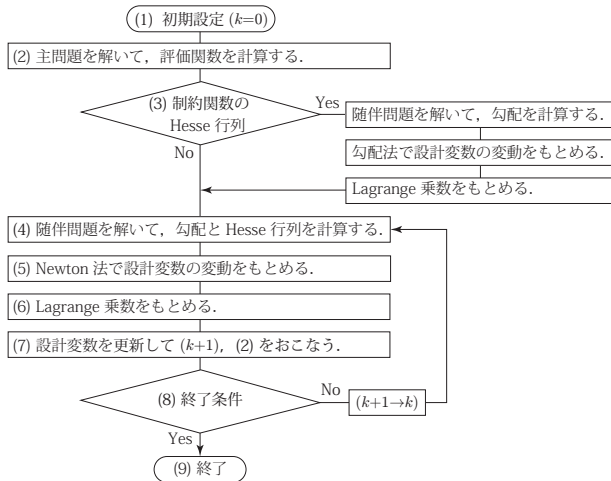


図 2.11: 制約つき問題に対する Newton 法のアルゴリズム

§2.5 Newton 法 (cnt.)

例題 2.4 (平均コンプライアンス最小化問題の数値例)

例題 2.1 に対して, 初期点を $\mathbf{a}_{(0)} = (1/2, 1/2)^T$ とおき, 試行点をもとめよ.

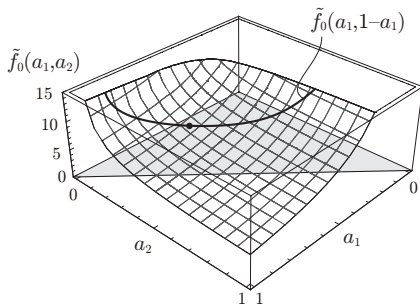


図 2.12: 状態方程式を満たす設計変数の集合における平均コンプライアンス

§2.5 Newton 法 (cnt.)

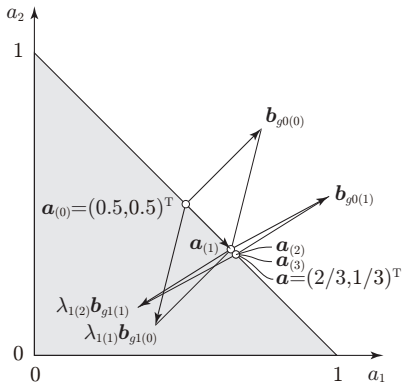
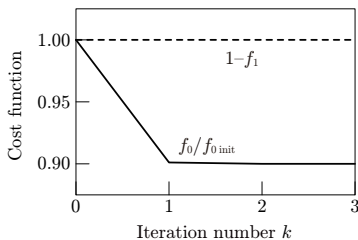


図 2.13: Newton 法による数値例：試行点の推移

§2.5 Newton 法 (cnt.)



(b) 評価関数の履歴

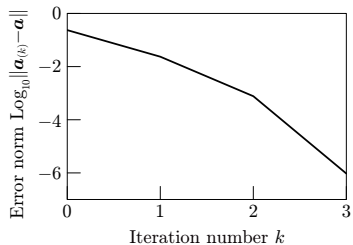
(c) 最小点からの距離 $\|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}\|_{\mathbb{R}^2}$

図 2.14: Newton 法による数値例

§2.5 Newton 法 (cnt.)

一方，例題 2.3 のような体積最小化問題に対して Newton 法をそのまま適用すれば，収束しない結果におちいる．

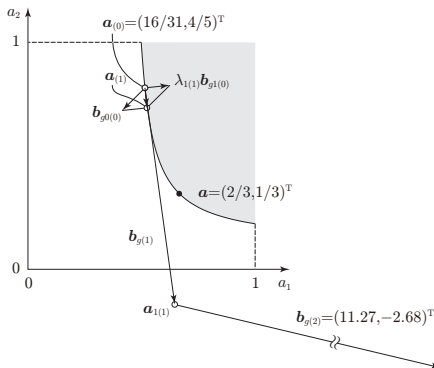


図 2.15: Newton 法による体積最小化問題の数値例

§3 線形弾性体の位相最適化問題

- ① 平均コンプライアンス最小化問題を定義する。
- ② 平均コンプライアンスの θ 微分と 2 階 θ 微分をもとめる。
- ③ 勾配法と Newton 法による解法をしめす。
- ④ 勾配法と Newton 法による数値例をしめす。

§3.1 主問題

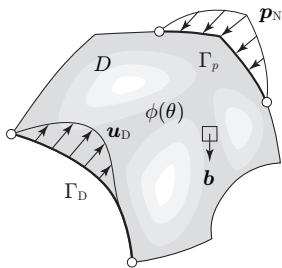


図 3.1: 線形弾性体

§3.1 主問題 (cnt.)

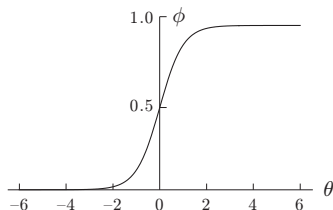


図 3.2: 設計変数 θ を密度 $\phi(\theta)$ に変換するシグモイド関数

設計変数 $\theta \in \mathcal{D}$ に対して, 密度を

$$\phi(\theta) = \frac{1}{2} \tanh \theta + \frac{1}{2} \quad (3.1)$$

とおく.

§3.1 主問題 (cnt.)

問題 3.1 (θ 型線形弾性問題)

$\alpha > 1$ を定数とする. $\phi(\theta)$ を $\theta \in \mathcal{D}$ に対して

$$-\nabla^T(\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{u})) = \mathbf{b}^T(\theta) \quad \text{in } D, \quad (3.2)$$

$$\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} = \mathbf{p}_N \quad \text{on } \Gamma_N, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \quad \text{on } \Gamma_D \quad (3.4)$$

をみたす $\mathbf{u} : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ をもとめよ.

§3.1 主問題 (cnt.)

問題 3.1 に対する Lagrange 関数を

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_M(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_D (-\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) + \mathbf{b}(\theta) \cdot \mathbf{v}) dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{p}_N \cdot \mathbf{v} d\gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_D} \{(\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \cdot (\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{v}) \boldsymbol{\nu}) + \mathbf{v} \cdot (\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu})\} d\gamma\end{aligned}$$

と定義しておく. \mathbf{u} が問題 3.1 の解ならば, 任意の $\mathbf{v} \in U$ に対して,

$$\mathcal{L}_M(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$$

がなりたつ.

§3.2 平均コンプライアンス最小化問題

問題 3.1 の解 \mathbf{u} に対して、平均コンプライアンスと領域の大きさに対する制約関数

$$f_0(\mathbf{u}) = \int_D \mathbf{b}(\theta) \cdot \mathbf{u} \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{p}_N \cdot \mathbf{u} \, d\gamma - \int_{\Gamma_D} \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} \, d\gamma \quad (3.5)$$

$$f_1(\theta) = \int_D \phi(\theta) \, dx - c_1 \quad (3.6)$$

を定義する.

問題 3.2 (平均コンプライアンス最小化問題)

f_0 と f_1 に対して,

$$\min_{\theta \in \mathcal{D}} \{ f_0(\theta, \mathbf{u}) \mid f_1(\theta) \leq 0, \mathbf{u} - \mathbf{u}_D \in \mathcal{S}, \text{ 問題 3.1} \}$$

をみたす θ をもとめよ.

§3.3 評価関数の θ 微分

f_0 の Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}_0(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) = f_0(\theta, \mathbf{u}) + \mathcal{L}_M(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) \quad (3.7)$$

とおく. $(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)$ の任意変動 $(\vartheta, \mathbf{u}', \mathbf{v}'_0) \in X \times U \times U$ に対する \mathcal{L}_0 の θ 微分は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_0(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\vartheta, \mathbf{u}', \mathbf{v}'_0] &= \mathcal{L}_{0\theta}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\vartheta] + \mathcal{L}_{0\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{u}'] \\ &\quad + \mathcal{L}_{0\mathbf{v}_0}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{v}'_0] \end{aligned} \quad (3.8)$$

とかける.

§3.3 評価関数の θ 微分 (cnt.)

式 (3.8) の右辺第 3 項は,

$$\mathcal{L}_{0v_0}(\theta, \mathbf{u}, v_0)[v'_0] = \mathcal{L}_{Mv_0}(\theta, \mathbf{u}, v_0)[v'_0] = \mathcal{L}_M(\theta, \mathbf{u}, v'_0) \quad (3.9)$$

となる. 式 (3.9) は主問題 (問題 3.1) の Lagrange 関数になっている. そこで, \mathbf{u} が主問題の弱解であるならば, 式 (3.8) の右辺第 3 項は 0 となる.

また, 式 (3.8) の右辺第 2 項は,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, v_0)[\mathbf{u}'] &= \int_D (-\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{u}') \cdot \mathbf{E}(v_0) + \mathbf{b}(\theta) \cdot \mathbf{u}') dx \\ &+ \int_{\Gamma_N} \mathbf{p}_N \cdot \mathbf{u}' d\gamma \\ &+ \int_{\Gamma_D} \{\mathbf{u}' \cdot (\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(v_0) \boldsymbol{\nu}) + (v_0 - \mathbf{u}_D) \cdot (\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{u}') \boldsymbol{\nu})\} d\gamma \\ &= \mathcal{L}_M(\theta, v_0, \mathbf{u}') \end{aligned} \quad (3.10)$$

§3.3 評価関数の θ 微分 (cnt.)

となる．ここで，式 (3.10) が 0 となるように v_0 を決定できれば，式 (3.8) の右辺第 2 項は 0 となる．この関係は，**自己随伴関係**

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_0 \tag{3.11}$$

がなりたつことを意味している．

§3.3 評価関数の θ 微分 (cnt.)

さらに，式 (3.8) の右辺第 1 項は，

$$\mathcal{L}_{0\theta}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\vartheta] = \int_D \{ \mathbf{b}_\theta \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}_0) - \alpha \phi^{\alpha-1} \phi' \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_0) \} \vartheta \, dx \quad (3.12)$$

となる。

そこで， \mathbf{u} が問題 3.1 の弱解で，自己随伴関係式 (3.11) がなりたつとする。このときの $f_0(\theta, \mathbf{u})$ を $\tilde{f}_0(\theta)$ とかくことにすれば，

$$\tilde{f}'_0(\theta)[\vartheta] = \mathcal{L}_{0\theta}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\vartheta] = \langle g_0, \vartheta \rangle \quad (3.13)$$

のようにかかる。ここで，

$$g_0 = 2\mathbf{b}_\theta \cdot \mathbf{u} - \alpha \phi^{\alpha-1} \phi' \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}) \quad (3.14)$$

となる。

§3.3 評価関数の θ 微分 (cnt.)

一方, $f_1(\theta)$ に関しては, 任意の $\vartheta \in X$ に対して

$$f_1'(\theta)[\vartheta] = \int_D \phi' \vartheta \, dx = \langle g_1, \vartheta \rangle \quad (3.15)$$

がなりたつ.

§3.4 評価関数の 2 階 θ 微分

\mathbf{b} は θ の関数ではないと仮定する. 設計変数 (θ, \mathbf{u}) の任意変動 $(\vartheta_1, \mathbf{u}'_1) \in X \times U$ と $(\vartheta_2, \mathbf{u}'_2) \in X \times U$ に対する $f_0(\theta, \mathbf{u})$ の 2 階 θ 微分は

$$\begin{aligned}
 & h_0(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\vartheta_1, \vartheta_2] \\
 &= \int_D \left\{ 2 \frac{(\phi^\alpha(\theta))'^2}{\phi^\alpha(\theta)} - (\phi^\alpha(\theta))'' \right\} \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_0) \vartheta_1 \vartheta_2 \, dx \\
 &= \int_D \beta(\alpha, \theta) \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_0) \vartheta_1 \vartheta_2 \, dx \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

となる.

§3.4 評価関数の 2 階 θ 微分 (cnt.)

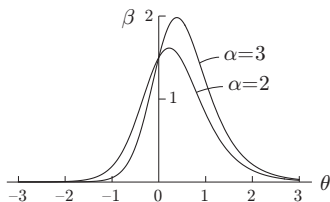


図 3.3: 評価関数の 2 階 θ 微分における係数関数 $\beta(\alpha, \theta)$

§3.4 評価関数の 2 階 θ 微分 (cnt.)

$f_1(\theta)$ の 2 階 θ 微分は, 任意の $\vartheta_1, \vartheta_2 \in X$ に対して

$$h_1(\theta)[\vartheta_1, \vartheta_2] = f_1''(\theta)[\vartheta_1, \vartheta_2] = \int_D \phi''(\theta) \vartheta_1 \vartheta_2 \, dx \quad (3.17)$$

となる. ここで,

$$\phi''(\theta) = -\operatorname{sech}^2 \theta \tanh \theta \quad (3.18)$$

となる.

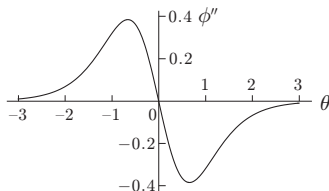


図 3.4: h_1 における係数関数 $\phi''(\theta)$

§3.5 H^1 勾配法問題 3.3 (θ 型 H^1 勾配法)

$a_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ を X 上の強圧的かつ有界な双 1 次形式 (任意の $\vartheta \in X$ と $\psi \in X$ に対して, ある正定数 α_X と β_X が存在して,

$$a_X(\vartheta, \vartheta) \geq \alpha_X \|\vartheta\|_X^2, \quad |a_X(\vartheta, \psi)| \leq \beta_X \|\vartheta\|_X \|\psi\|_X \quad (3.19)$$

がなりたつ) とする. f_i の θ 微分を $g_i(\theta_k) \in X'$ とする. このとき, 任意の $\psi \in X$ に対して

$$a_X(\vartheta_{g_i}, \psi) = -\langle g_i(\theta_k), \psi \rangle \quad (3.20)$$

をみたす $\vartheta_{g_i} \in X$ をもとめよ.

例えば,

$$a_X(\vartheta, \psi) = \int_D (\nabla \vartheta \cdot \nabla \psi + c_D \vartheta \psi) \, dx \quad (3.21)$$

§3.5 H^1 勾配法 (cnt.)

とおく.

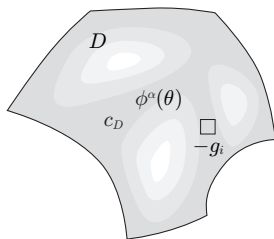


図 3.5: H^1 空間の内積をもちいた H^1 勾配法

§3.5 H^1 勾配法 (cnt.)

問題 3.4 (H^1 内積をもちいた H^1 勾配法)

$\theta \in \mathcal{D}$ において $g_i \in X'$ があたえられたとき,

$$-\Delta \vartheta_{g_i} + c_D \vartheta_{g_i} = -g_i \quad \text{in } D,$$

$$\partial_\nu \vartheta_{g_i} = 0 \quad \text{on } \partial D$$

をみたす $\vartheta_{g_i} : D \rightarrow \mathbb{R}$ をもとめよ.

§3.6 H^1 Newton 法

問題 3.5 (目的関数の 2 階微分をもちいた 2 次近似問題)

$(\theta_k, \lambda_k) \in X \times \mathbb{R}^{|I_A|}$ において $g_0(\theta_k), g_{i_1}(\theta_k), \dots, g_{i_{|I_A|}}(\theta_k)$ と $h_0(\theta_k)$ と $h_{i_1}(\theta_k), \dots, h_{i_{|I_A|}}(\theta_k)$ を既知として,

$$h_{\mathcal{L}}(\theta_k) = h_0(\theta_k) + \sum_{i \in I_A(\theta_k)} \lambda_{ik} h_i(\theta_k) \quad (3.22)$$

とおく. このとき,

$$q(\vartheta_g) = \min_{\vartheta \in X} \left\{ q(\vartheta) = \frac{1}{2} (h_{\mathcal{L}}(\theta_k)[\vartheta, \vartheta] + a_X(\vartheta, \vartheta)) + \langle g_0(\theta_k), \vartheta \rangle \right. \\ \left. + f_0(\theta_k) \mid f_i(\theta_k) + \langle g_i(\theta_k), \vartheta \rangle \leq 0 \text{ for } i \in I_A(\theta_k) \right\}$$

をみたす $\theta_{k+1} = \theta_k + \vartheta_g$ をもとめよ.

§3.6 H^1 Newton 法 (cnt.)

問題 3.6 (θ 型 H^1 Newton 法)

問題 3.5 の既知関数があたえられたとき, 任意の $\vartheta \in X$ に対して

$$h_{\mathcal{L}}(\theta_k)[\vartheta_{gi}, \vartheta] + a_X(\vartheta_{gi}, \vartheta) = -\langle g_i(\theta_k), \vartheta \rangle \quad (3.23)$$

をみたす $\vartheta_{gi} \in X$ をもとめよ.

例えば,

$$a_X(\vartheta, \psi) = \int_D (c_{D1} \nabla \vartheta \cdot \nabla \psi + c_{D0} \vartheta \psi) \, dx \quad (3.24)$$

のようにおく.

§3.7 数値例

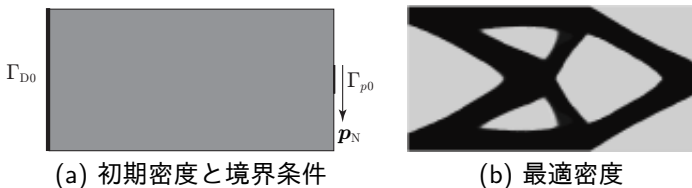


図 3.6: 2次元線形弾性体の密度型位相最適化問題に対する数値例: 密度比較 (適合メッシュあり)

§3.7 数値例 (cnt.)

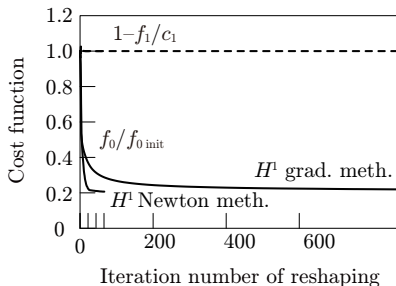


図 3.7: 2次元線形弾性体の密度型位相最適化問題に対する数値例: 評価関数の履歴

§3.7 数値例 (cnt.)



(a) H^1 勾配法 (更新回数 800)



(b) H^1 Newton 法 (更新回数 158)

図 3.8: 2次元線形弾性体の密度型位相最適化問題に対する数値例: 最適密度 (適合メッシュあり)

§4 Stokes 流れ場の位相最適化問題

- ① 平均流れ抵抗最小化問題を定義する.
- ② 平均流れ抵抗の θ 微分と 2 階 θ 微分をもとめる.
- ③ 勾配法による数値例をしめす.

§4.1 主問題

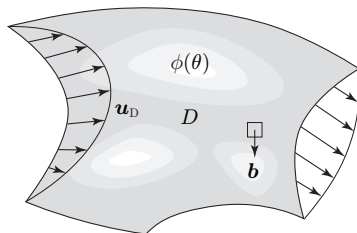


図 4.1: Stokes 流れ場

浸透流の流れにくさをあらわす係数を

$$\psi(\phi) = \psi_1 \left\{ 1 - \frac{\phi(1+\alpha)}{\phi+\alpha} \right\} = \psi_1 \frac{\alpha(1-\phi)}{\alpha+\phi} \quad (4.1)$$

とおく.

§4.1 主問題 (cnt.)

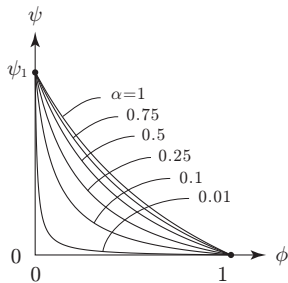


図 4.2: 浸透流の流れにくさをあらわす係数 ψ

§4.1 主問題 (cnt.)

問題 4.1 (θ 型 Stokes 問題)

$\theta \in \mathcal{D}$ に対して,

$$-\nabla^T (\mu \nabla \mathbf{u}^T) + \psi(\phi(\theta)) \mathbf{u}^T + \nabla^T p = \mathbf{b}^T \quad \text{in } D, \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } D, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \quad \text{on } \partial D, \quad (4.4)$$

$$\int_D p \, dx = 0 \quad (4.5)$$

を満たす $(\mathbf{u}, p) : D \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ を求めよ。

§4.1 主問題 (cnt.)

問題 4.1 に対する Lagrange 関数を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}, q) &= \int_D \{-\mu(\nabla \mathbf{u}^T) \cdot (\nabla \mathbf{v}^T) - \psi(\phi(\theta)) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ &\quad + p \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + q \nabla \cdot \mathbf{u}\} dx \\ &\quad + \int_{\partial D} \{(\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \cdot (\mu \partial_\nu \mathbf{v} - q \boldsymbol{\nu}) + \mathbf{v} \cdot (\mu \partial_\nu \mathbf{u} - p \boldsymbol{\nu})\} d\gamma \quad (4.6) \end{aligned}$$

と定義しておく. (\mathbf{u}, p) が問題 4.1 の解のとき, 任意の $(\mathbf{v}, q) \in U \times Q$ に対して,

$$\mathcal{L}_M(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}, q) = 0$$

がなりたつ.

§4.2 平均流れ抵抗最小化問題

流れにくさをあらわす評価関数として

$$f_0(\theta, \mathbf{u}, p) = - \int_D \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dx + \int_{\partial D} \mathbf{u}_D \cdot (\mu \partial_\nu \mathbf{u} - p \boldsymbol{\nu}) \, d\gamma \quad (4.7)$$

を**平均流れ抵抗**とよぶことにする。それに対して,

$$f_1(\theta) = \int_D \phi(\theta) \, dx - c_1 \quad (4.8)$$

を流れ場の大きさ制約に対する評価関数とする。

問題 4.2 (平均流れ抵抗最小化問題)

f_0 と f_1 に対して,

$$\min_{\theta \in \mathcal{D}} \{ f_0(\theta, \mathbf{u}, p) \mid f_1(\theta), (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D, p) \in \mathcal{S} \times \mathcal{P}, \text{問題 4.1} \}$$

を満たす θ をもとめよ。

§4.3 評価関数の θ 微分

$f_0(\theta, \mathbf{u}, p)$ の θ 微分を随伴変数法でもとめよう. f_0 の Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}_0(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0) = f_0(\theta, \mathbf{u}, p) - \mathcal{L}_M(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0) \quad (4.9)$$

とおく. $(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)$ の任意変動 $(\vartheta, \mathbf{u}', p', \mathbf{v}'_0, q'_0) \in X \times (U \times Q)^2$ に対する \mathcal{L}_0 の θ 微分は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_0(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0) [\vartheta, \mathbf{u}', p', \mathbf{v}'_0, q'_0] &= \mathcal{L}_{0\theta}(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0) [\vartheta] \\ &+ \mathcal{L}_{0\mathbf{u}p}(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0) [\mathbf{u}', p'] + \mathcal{L}_{0\mathbf{v}_0q_0}(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0) [\mathbf{v}'_0, q'_0] \end{aligned} \quad (4.10)$$

とかける.

§4.3 評価関数の θ 微分 (cnt.)

式 (4.10) の右辺第 3 項は,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{0\mathbf{v}_0q_0}(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)[\mathbf{v}'_0, q'_0] &= \mathcal{L}_{M\mathbf{v}_0q_0}(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)[\mathbf{v}'_0, q'_0] \\ &= -\mathcal{L}_M(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}'_0, q'_0)\end{aligned}\quad (4.11)$$

となる. 式 (4.11) は主問題 (問題 4.1) の Lagrange 関数になっている. そこで, (\mathbf{u}, p) が主問題の弱解ならば, 式 (4.10) の右辺第 3 項は 0 となる.

§4.3 評価関数の θ 微分 (cnt.)

また、式 (4.10) の右辺第 2 項は、 (\mathbf{u}, p) の任意の変動 $(\mathbf{u}', p') \in U \times Q$ に対して、

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}_{0\mathbf{u}p}(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)[\mathbf{u}', p'] \\
 &= \int_D \left\{ \mu (\nabla \mathbf{u}'^T) \cdot (\nabla \mathbf{v}_0^T) + \psi(\phi(\theta)) \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}_0 - p' \nabla \cdot \mathbf{v}_0 \right. \\
 &\quad \left. - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}' - q_0 \nabla \cdot \mathbf{u}' \right\} dx \\
 &\quad - \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{u}' \cdot (\mu \partial_\nu \mathbf{v}_0 - q_0 \boldsymbol{\nu}) + (\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_D) \cdot (\mu \partial_\nu \mathbf{u}' - p' \boldsymbol{\nu}) \right\} d\gamma \\
 &= -\mathcal{L}_M(\theta, \mathbf{v}_0, q_0, \mathbf{u}', p') \tag{4.12}
 \end{aligned}$$

となる。そこで、**自己随伴関係**

$$(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{v}_0, q_0) \tag{4.13}$$

がなりたつとき、式 (4.10) の右辺第 2 項は 0 となる。

§4.3 評価関数の θ 微分 (cnt.)

さらに、式 (4.10) の右辺第 1 項は、

$$\mathcal{L}_{0\theta}(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)[\vartheta] = \int_D \psi'(\phi(\theta)) \phi'(\theta) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_0 \vartheta \, dx \quad (4.14)$$

となる。

そこで、 (\mathbf{u}, p) が問題 4.1 の弱解で、自己随伴関係式 (4.13) がなりたつとする。このときの $f_0(\theta, \mathbf{u}, p)$ を $\tilde{f}_0(\theta)$ とかくことにすれば、

$$\tilde{f}'_0(\theta)[\vartheta] = \mathcal{L}_{0\theta}(\theta, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)[\vartheta] = \langle g_0, \vartheta \rangle \quad (4.15)$$

のようにかかれる。ここで、

$$g_0 = \psi' \phi' \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \quad (4.16)$$

となる。 $\psi(\phi)$ に式 (4.1) をもちいたときには、

$$\psi'(\phi) = -\psi_1 \frac{\alpha(1+\alpha)}{(\phi+\alpha)^2} \quad (4.17)$$

§4.3 評価関数の θ 微分 (cnt.)

となる.

一方, $f_1(\theta)$ に関しては, 任意の $\vartheta \in X$ に対して

$$f_1'(\theta)[\vartheta] = \int_D \phi' \vartheta \, dx = \langle g_1, \vartheta \rangle \quad (4.18)$$

がなりたつ.

§4.4 評価関数の 2 階 θ 微分

\mathbf{b} は θ の関数ではないと仮定する. (θ, \mathbf{u}, p) の任意変動 $(\vartheta_1, \mathbf{u}'_1, p'_1) \in X \times U \times Q$ と $(\vartheta_2, \mathbf{u}'_2, p'_2) \in X \times U \times Q$ に対する $f_0(\theta, \mathbf{u})$ の 2 階 θ 微分は

$$\begin{aligned} h_0(\vartheta_1, \vartheta_2) &= \int_D \left\{ \psi''(\phi')^2 + \psi' \phi'' - 2 \frac{(\psi' \phi')^2}{\psi} \right\} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_0 \vartheta_1 \vartheta_2 \, dx \\ &= \int_D \psi_1 \beta(\alpha, \theta) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_0 \vartheta_1 \vartheta_2 \, dx \end{aligned} \quad (4.19)$$

となる. ただし,

$$\psi'(\phi) = -\frac{\alpha(1+\alpha)}{(\phi+\alpha)^2}, \quad (4.20)$$

$$\psi''(\phi) = \frac{2\alpha(1+\alpha)}{(\phi+\alpha)^3} \quad (4.21)$$

§4.4 評価関数の 2 階 θ 微分 (cnt.)

となる．ここで，平均流れ抵抗最小化問題 (問題 4.2) の最小点では

$$\int_D \left\{ -\mu \left(\nabla (\mathbf{u}'(\theta) [\vartheta])^T \right) \cdot (\nabla \mathbf{v}^T) + p'(\theta) [\vartheta] \nabla \cdot \mathbf{v} + q \nabla \cdot \mathbf{u}'(\theta) [\vartheta] \right\} dx = 0 \quad (4.22)$$

がなりたつと仮定された．

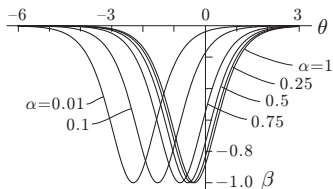


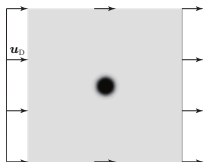
図 4.3: 評価関数の 2 階 θ 微分における係数関数 $-\beta(\alpha, \theta)$

§4.4 評価関数の 2 階 θ 微分 (cnt.)

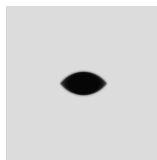
一方, $f_1(\theta)$ の 2 階 θ 微分は, 式 (3.17) となる.

このように, 平均流れ抵抗最小化問題では, 目的関数 f_0 の 2 階 θ 微分は強圧的にはならず, 制約関数 f_1 の 2 階 θ 微分も強圧的にはならないことになる. そこで, 平均流れ抵抗最小化問題に対して Newton 法を適用する場合には, 適切な双 1 次形式 $a_X(\vartheta_{gi}, \psi)$ をもちいて, 強圧性を補う必要がある.

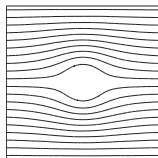
§4.5 数値例



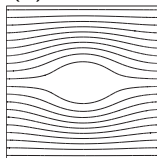
(a) 初期密度と境界条件



(b) 最適密度



(c) 初期密度に対する流線



(b) 最適密度に対する流線

図 4.4: 2次元 Stokes 流れ場の密度型位相最適化問題に対する数値例: 密度変化 (適合メッシュあり)

§4.5 数値例 (cnt.)

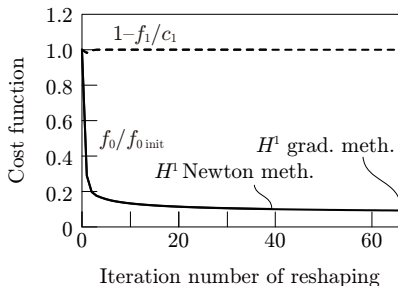
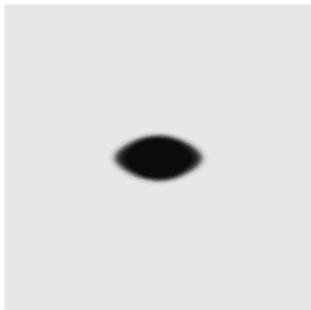
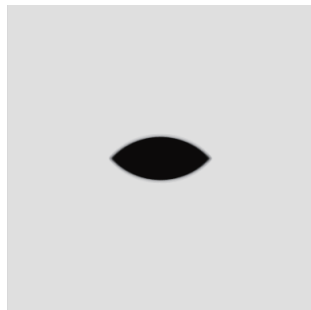


図 4.5: 2次元 Stokes 流れ場の密度型位相最適化問題に対する数値例: 評価関数の履歴

§4.5 数値例 (cnt.)



(a) H^1 勾配法 (更新回数 66)



(b) H^1 Newton 法 (更新回数 39)

図 4.6: 2次元線形弾性体の密度型位相最適化問題に対する数値例: 密度形状 (適合メッシュあり)

§5 線形弾性体の形状最適化問題

- ① 平均コンプライアンス最小化問題を定義する。
- ② 平均コンプライアンスの形状微分と 2 階形状微分をもとめる。
- ③ 勾配法と Newton 法による解法をしめす。
- ④ 勾配法による数値例をしめす。

§5.1 主問題

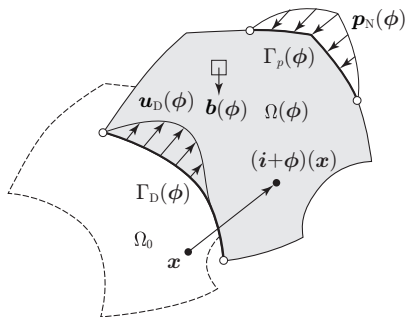


図 5.1: 初期領域 $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ と領域変動 $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$

§5.1 主問題 (cnt.)

問題 5.1 (線形弾性問題)

$\phi \in \mathcal{D}$ に対して $\mathbf{b}(\phi)$, $\mathbf{p}_N(\phi)$, $\mathbf{u}_D(\phi)$ および $C(\phi)$ があたえられたとき,

$$-\nabla^T \mathbf{S}(\phi, \mathbf{u}) = \mathbf{b}^T(\phi) \quad \text{in } \Omega(\phi), \quad (5.1)$$

$$\mathbf{S}(\phi, \mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} = \mathbf{p}_N(\phi) \quad \text{on } \Gamma_p(\phi), \quad (5.2)$$

$$\mathbf{S}(\phi, \mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{on } \Gamma_N(\phi) \setminus \bar{\Gamma}_p(\phi), \quad (5.3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D(\phi) \quad \text{on } \Gamma_D(\phi) \quad (5.4)$$

をみたす $\mathbf{u} : \Omega(\phi) \rightarrow \mathbb{R}^d$ をもとめよ.

§5.1 主問題 (cnt.)

問題 5.1 に対する Lagrange 関数を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega(\phi)} (-\mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) \, dx + \int_{\Gamma_p(\phi)} \mathbf{p}_N \cdot \mathbf{v} \, d\gamma \\ &+ \int_{\Gamma_D(\phi)} \{(\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \cdot (\mathbf{S}(\mathbf{v}) \boldsymbol{\nu}) + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu})\} \, d\gamma \end{aligned} \quad (5.5)$$

と定義しておく. \mathbf{u} が問題 5.1 の解ならば, 任意の $\mathbf{v} \in U$ に対して,

$$\mathcal{L}_M(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$$

がなりたつ.

§5.2 形状最適化問題

平均コンプライアンスと領域の大きさに対する制約関数を

$$\begin{aligned} f_0(\phi, \mathbf{u}) &= \hat{l}(\phi)(\mathbf{u}) \\ &= \int_{\Omega(\phi)} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dx + \int_{\Gamma_N(\phi)} \mathbf{p}_N \cdot \mathbf{u} \, d\gamma - \int_{\Gamma_D(\phi)} \mathbf{u}_D \cdot (\mathbf{S}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu}) \, d\gamma \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$f_1(\phi) = \int_{\Omega(\phi)} dx - c_1 \quad (5.7)$$

とおく.

§5.2 形状最適化問題 (cnt.)

問題 5.2 (平均コンプライアンス最小化問題)

f_0 と f_1 に対して,

$$\min_{\phi \in \mathcal{D}} \{ f_0(\phi, \mathbf{u}) \mid f_1(\phi) \leq 0, \mathbf{u} - \mathbf{u}_D \in \mathcal{S}, \text{問題 5.1} \}$$

をみたす $\Omega(\phi)$ を求めよ.

§5.3 評価関数の形状微分

$f_0(\phi, \mathbf{u})$ の Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}_0(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) = f_0(\phi, \mathbf{u}) + \mathcal{L}_M(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) \quad (5.8)$$

とおくことにする.

関数の形状微分公式をもちいた形状微分

$\mathbf{b}(\phi)$, $\mathbf{p}_N(\phi)$, $\mathbf{u}_D(\phi)$ および $C(\phi)$ は物質固定であると仮定する。
 このとき, \mathcal{L}_0 の形状微分は, 任意の $(\varphi, \mathbf{u}', \mathbf{v}'_0) \in X \times U \times U$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_0(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\varphi, \mathbf{u}', \mathbf{v}'_0] &= \mathcal{L}_{0\phi'}(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\varphi] \\ &+ \mathcal{L}_{0\mathbf{u}}(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{u}'] + \mathcal{L}_{0\mathbf{v}_0}(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{v}'_0] \end{aligned} \quad (5.9)$$

とかける。

式 (5.9) の右辺第 3 項は,

$$\mathcal{L}_{0\mathbf{v}_0}(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{v}'_0] = \mathcal{L}_{M\mathbf{v}_0}(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{v}'_0] = \mathcal{L}_M(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}'_0) \quad (5.10)$$

とかきかえることができる。式 (5.10) は主問題 (問題 5.1) の Lagrange 関数になっている。そこで, \mathbf{u} が主問題の弱解ならば, 式 (5.9) の右辺第 3 項は 0 となる。

関数の形状微分公式をもちいた形状微分 (cnt.)

また, 式 (5.9) の右辺第 2 項は,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{0u}(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\mathbf{u}'] &= \int_{\Omega(\phi)} (-\mathbf{S}(\mathbf{u}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_0) + \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}') dx \\
 &+ \int_{\Gamma_p(\phi)} \mathbf{p}_N \cdot \mathbf{u}' d\gamma \\
 &+ \int_{\Gamma_D(\phi)} \{\mathbf{u}' \cdot (\mathbf{S}(\mathbf{v}_0) \boldsymbol{\nu}) + \mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{S}(\mathbf{u}') \boldsymbol{\nu})\} d\gamma \\
 &= \mathcal{L}_M(\phi, \mathbf{v}_0, \mathbf{u}') \tag{5.11}
 \end{aligned}$$

となる. 式 (5.11) と式 (5.10) を比較すれば, \mathbf{v}_0 と \mathbf{u} をいれかえた関係になっていることがわかる. そこで, **自己随伴関係**

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{u} \tag{5.12}$$

がなりたつならば, 式 (5.9) の右辺第 2 項は 0 になる.

関数の形状微分公式をもちいた形状微分 (cnt.)

さらに, 式 (5.9) の右辺第 1 項は, 文献 [1] の命題 4.4 と命題 4.7 より,

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}_{0\phi'}(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\varphi] \\
 &= \int_{\Omega(\phi)} \left[\left(\mathbf{S}(\mathbf{u}) (\nabla \mathbf{v}_0^T)^T + \mathbf{S}(\mathbf{v}_0) (\nabla \mathbf{u}^T)^T \right) \cdot \nabla \varphi^T \right. \\
 & \quad \left. + \{ -\mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_0) + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}_0) \} \nabla \cdot \varphi \right] dx \\
 & \quad + \int_{\Gamma_p(\phi)} \kappa \{ \mathbf{p}_N \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}_0) \} \boldsymbol{\nu} \cdot \varphi \, d\gamma \\
 & \quad + \int_{\partial\Gamma_p(\phi) \cup \Theta(\phi)} \{ \mathbf{p}_N \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}_0) \} \boldsymbol{\tau} \cdot \varphi \, d\varsigma \\
 & \quad + \int_{\Gamma_D(\phi)} \left[\{ (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \cdot \mathbf{w}(\varphi, \mathbf{v}_0) + (\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_D) \cdot \mathbf{w}(\varphi, \mathbf{u}) \} \right. \\
 & \quad \left. + \{ (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \cdot (\mathbf{S}(\mathbf{v}_0) \boldsymbol{\nu}) + (\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_D) \cdot (\mathbf{S}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu}) \} (\nabla \cdot \varphi)_\tau \right] d\gamma \\
 & \hspace{15em} (5.13)
 \end{aligned}$$

関数の形状微分公式をもちいた形状微分 (cnt.)

となる。ただし、

$$w(\varphi, u) = S(u) \left[\{\nu \cdot (\nabla \varphi^T \nu)\} \nu - \{(\nabla \varphi^T + (\nabla \varphi^T)^T)\} \nu \right] \quad (5.14)$$

とおいた。ここで、次の命題がつかわれた [1].

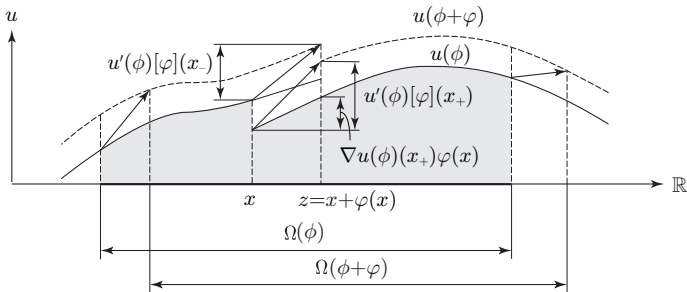


図 5.2: 領域変動と共に変動する関数 $u(\phi)$ (不連続関数の場合)

関数の形状微分公式をもちいた形状微分 (cnt.)

命題 5.1 (領域積分の形状微分: 関数の形状微分)

$\phi \in \mathcal{D}$ と関数 u とその関数 $h(u, \nabla u)$ が与えられたとき, 任意の $\varphi \in X$ に対して, $z = x + \varphi(x)$ とかくことにして,

$$\begin{aligned} & f(\phi + \varphi, u(\phi + \varphi), \nabla_z u(\phi + \varphi)) \\ &= \int_{\Omega(\phi + \varphi)} h(u(\phi + \varphi), \nabla_z u(\phi + \varphi)) dz \end{aligned}$$

とおく. このとき, f の形状微分は, $u(\phi)$, $\nabla u(\phi)$ および $u'(\phi)[\varphi]$ をそれぞれ u , ∇u および u' とかくことにして,

関数の形状微分公式をもちいた形状微分 (cnt.)

$$\begin{aligned} f'(\phi, u, \nabla u)[\varphi] = & \int_{\Omega(\phi)} \{h_u(u, \nabla u)[u'] \\ & + h_{\nabla u}(u, \nabla u)[\nabla u' - \nabla \varphi^T \nabla u] + h(u, \nabla u) \nabla \cdot \varphi\} dx \end{aligned} \quad (5.15)$$

となる.

関数の形状微分公式をもちいた形状微分 (cnt.)

命題 5.2 (境界積分の形状微分: 関数の形状微分)

$\phi \in \mathcal{D}$ に対して, 関数 u とその関数 $h(u, \partial_\nu u)$ が与えられたとき, 任意の φ に対して, $\partial_\mu = \mu \cdot \nabla_z$ とかき, μ は $\partial\Omega(\phi + \varphi)$ 上の法線をあらわすとして,

$$\begin{aligned} & f(\phi + \varphi, u(\phi + \varphi), \partial_\mu u(\phi + \varphi)) \\ &= \int_{\Gamma(\phi + \varphi)} h(u(\phi + \varphi), \partial_\mu u(\phi + \varphi)) d\zeta \end{aligned}$$

とおく. このとき, f の形状微分は

関数の形状微分公式をもちいた形状微分 (cnt.)

$$\begin{aligned}
f'(\phi, u, \partial_\nu u)[\varphi] &= \int_{\Gamma(\phi)} \left(h_u(u, \partial_\nu u)[u'] \right. \\
&\quad + h_{\partial_\nu u}(u, \partial_\nu u)[\partial_\nu u' + w(\varphi, u)] \\
&\quad + \kappa h(u, \partial_\nu u) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \nabla_\tau h(u, \partial_\nu u) \cdot \boldsymbol{\varphi}_\tau \Big) d\gamma \\
&\quad + \int_{\partial\Gamma(\phi) \cup \Theta(\phi)} h(u, \partial_\nu u) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varphi} d\zeta
\end{aligned} \tag{5.16}$$

となる。ただし,

$$w(\varphi, u) = \left[\{ \boldsymbol{\nu} \cdot (\nabla \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\nu}) \} \boldsymbol{\nu} - \{ (\nabla \boldsymbol{\varphi}^T + (\nabla \boldsymbol{\varphi}^T)^T) \boldsymbol{\nu} \} \cdot \nabla u \right]$$

とする。

関数の形状微分公式をもちいた形状微分 (cnt.)

以上の結果から,

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}'_0(\phi)[\varphi] &= \mathcal{L}_{0\phi'}(\phi, \mathbf{u}, \nu_0)[\varphi] = \langle \mathbf{g}_0, \varphi \rangle \\
 &= \int_{\Omega(\phi)} (\mathbf{G}_{\Omega 0} \cdot \nabla \varphi^T + g_{\Omega 0} \nabla \cdot \varphi) dx \\
 &\quad + \int_{\Gamma_p(\phi)} \mathbf{g}_{p0} \cdot \varphi d\gamma + \int_{\partial\Gamma_p(\phi) \cup \Theta(\phi)} \mathbf{g}_{\partial p0} \cdot \varphi d\varsigma
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

のようにまとめられる。ここで,

$$\mathbf{G}_{\Omega 0} = 2\mathbf{S}(\mathbf{u})(\nabla \mathbf{u}^T)^T, \tag{5.18}$$

$$g_{\Omega 0} = -\mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}) + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}, \tag{5.19}$$

$$\mathbf{g}_{p0} = 2\kappa(\mathbf{p}_N \cdot \mathbf{u})\boldsymbol{\nu}, \tag{5.20}$$

$$\mathbf{g}_{\partial p0} = 2(\mathbf{p}_N \cdot \mathbf{u})\boldsymbol{\tau} \tag{5.21}$$

となる。

関数の形状微分公式をもちいた形状微分 (cnt.)

一方, $f_1(\phi)$ の形状微分は,

$$f_1'(\phi)[\varphi] = \langle g_1, \varphi \rangle = \int_{\Omega(\phi)} g_{\Omega 1} \nabla \cdot \varphi \, dx \quad (5.22)$$

となる. ここで,

$$g_{\Omega 1} = 1 \quad (5.23)$$

である.

関数の形状微分公式をもちいた 2 階形状微分

$\mathbf{b} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$ を仮定する. (ϕ, \mathbf{u}) の任意変動 $(\varphi_1, \mathbf{u}'_1) \in X \times U$ と $(\varphi_2, \mathbf{u}'_2) \in X \times U$ に対する f_0 の 2 階形状微分は,

$$\begin{aligned}
 & h_0(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{u})[\varphi_1, \varphi_2] \\
 &= \int_{\Omega(\phi)} \left[\mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}) \left\{ (\nabla \varphi_2^{\text{T}})^{\text{T}} \cdot \nabla \varphi_1^{\text{T}} + (\nabla \cdot \varphi_2)(\nabla \cdot \varphi_1) \right\} \right. \\
 & \quad + (\nabla \mathbf{u}^{\text{T}} \mathbf{S}(\mathbf{u})) \cdot \left\{ \nabla \varphi_1^{\text{T}} (\nabla \varphi_2^{\text{T}})^{\text{T}} + \nabla \varphi_2^{\text{T}} (\nabla \varphi_1^{\text{T}})^{\text{T}} \right\} \\
 & \quad \left. - 2(\mathbf{S}(\mathbf{u}) \mathbf{E}(\mathbf{u})) \cdot \left\{ \nabla \varphi_2^{\text{T}} (\nabla \cdot \varphi_1) + \nabla \varphi_1^{\text{T}} (\nabla \cdot \varphi_2) \right\} \right] dx
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

となる.

関数の形状微分公式をもちいた 2 階形状微分 (cnt.)

一方, $f_1(\phi)$ の 2 階形状微分は, 任意の $\varphi_1 \in X$ と $\varphi_2 \in X$ に対して,

$$h_1(\phi)[\vartheta_1, \vartheta_2] = \int_{\Omega(\phi)} \left\{ -(\nabla \varphi_2^T)^T \cdot \nabla \varphi_1^T + (\nabla \cdot \varphi_2)(\nabla \cdot \varphi_1) \right\} dx \quad (5.25)$$

となる.

§5.4 H^1 勾配法問題 5.3 (領域変動型 H^1 勾配法)

$a_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ を X 上の有界かつ強圧的な双 1 次形式 (任意の $\varphi \in X$ と $\psi \in X$ に対して, ある正定数 α_X と β_X が存在して

$$a_X(\varphi, \varphi) \geq \alpha_X \|\varphi\|_X^2, \quad |a_X(\varphi, \psi)| \leq \beta_X \|\varphi\|_X \|\psi\|_X \quad (5.26)$$

がなりたつ) とする. $g_i \in X'$ があたえられているとする. このとき, 任意の $\psi \in X$ に対して

$$a_X(\varphi_{g_i}, \psi) = -\langle g_i, \psi \rangle \quad (5.27)$$

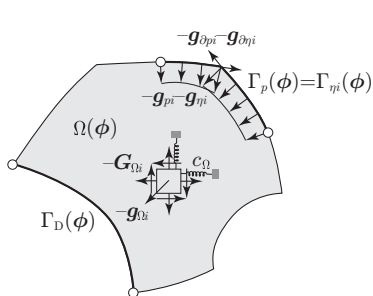
をみたす $\varphi_{g_i} \in X$ をもとめよ.

例えば,

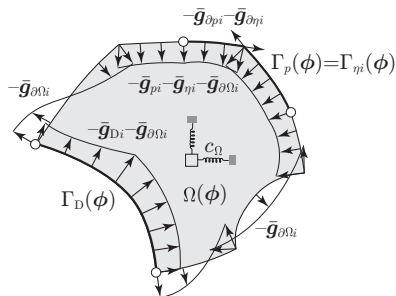
$$a_X(\varphi, \psi) = \int_{\Omega(\varphi)} \{(\nabla \varphi^T) \cdot (\nabla \psi^T) + c_{\Omega} \varphi \cdot \psi\} dx \quad (5.28)$$

§5.4 H^1 勾配法 (cnt.)

とおく.



(a) 関数の形状微分公式



(b) 関数の形状偏微分公式

図 5.3: $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ の内積をもちいた H^1 勾配法

§5.5 H^1 Newton 法

問題 5.4 (領域変動型 H^1 Newton 法)

$\phi_k \in \mathcal{D}$ における f_i の形状微分と 2 階形状微分をそれぞれ $g_i(\phi_k) \in X'$ および $h_i(\phi_k) \in \mathcal{L}^2(X \times X; \mathbb{R}^d)$ とする. また, $a_X: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ を $h_i(\phi_k)$ の X 上における強圧性と有界性を補うための対称な双 1 次形式とする. このとき, 任意の $\psi \in X$ に対して

$$h_i(\phi_k)[\varphi_{g_i}, \psi] + a_X(\varphi_{g_i}, \psi) = -\langle g_i(\phi_k), \psi \rangle \quad (5.29)$$

をみたす $\varphi_{g_i} \in X$ をもとめよ.

§5.6 数値例

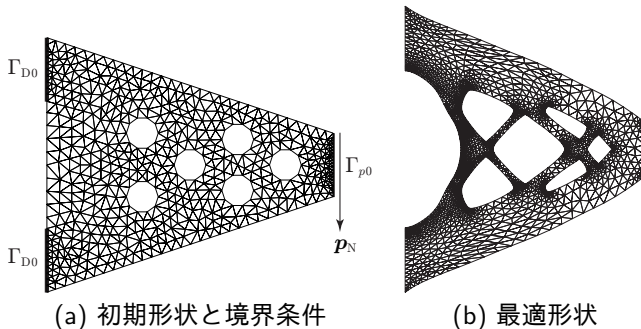


図 5.4: 2次元線形弾性体の形状最適化問題に対する数値例: 形状変化 (適合メッシュあり)

§5.6 数値例 (cnt.)

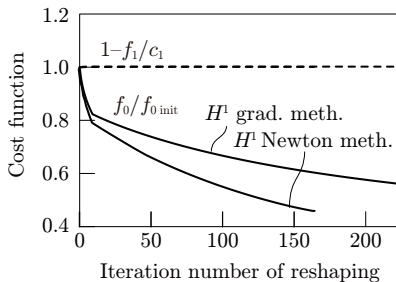


図 5.5: 2次元線形弾性体の形状最適化問題に対する数値例: 評価関数の履歴

§5.6 数値例 (cnt.)

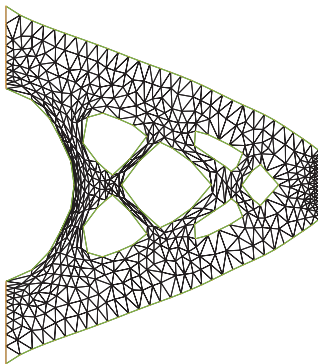
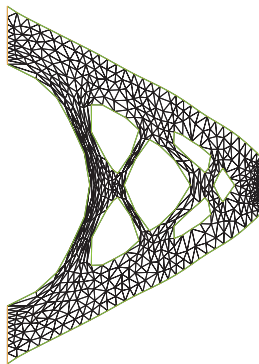
(a) H^1 勾配法(b) H^1 Newton 法

図 5.6: 2次元線形弾性体の形状最適化問題に対する数値例: 最適形状 (適合メッシュなし)

§6 Stokes 流れ場の形状最適化問題

- ① 平均流れ抵抗最小化問題を定義する.
- ② 平均流れ抵抗の形状微分と 2 階形状微分をもとめる.
- ③ 勾配法による数値例をしめす.

§6.1 主問題

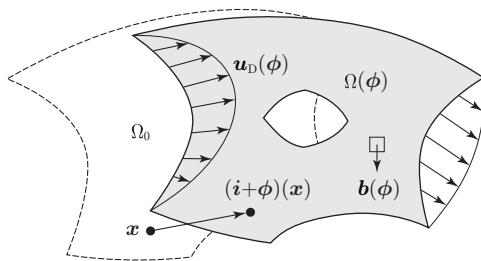


図 6.1: Stokes 流れ場に対する初期領域 $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ と領域変動 (変位) ϕ

§6.1 主問題 (cnt.)

問題 6.1 (Stokes 問題)

$\phi \in \mathcal{D}$ に対して \mathbf{b} , \mathbf{u}_D および μ があたえられたとき,

$$-\nabla^T(\mu \nabla \mathbf{u}^T) + \nabla^T p = \mathbf{b}^T \quad \text{in } \Omega(\phi), \quad (6.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega(\phi), \quad (6.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \quad \text{on } \partial\Omega(\phi), \quad (6.3)$$

$$\int_{\Omega(\phi)} p dx = 0 \quad (6.4)$$

をみたす $(\mathbf{u}, p) : \Omega(\phi) \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ をもとめよ。

§6.1 主問題 (cnt.)

問題 6.1 に対する Lagrange 関数を

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_M(\phi, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}, q) &= \int_{\Omega(\phi)} \{-\mu \nabla \mathbf{u}^T \cdot (\nabla \mathbf{v}^T) + p \nabla \cdot \mathbf{v} + q \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}\} dx, \\
 &+ \int_{\partial\Omega(\phi)} \{(\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \cdot (\mu \partial_\nu \mathbf{v} - q \boldsymbol{\nu}) + \mathbf{v} \cdot (\mu \partial_\nu \mathbf{u} - p \boldsymbol{\nu})\} d\gamma
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

とおく. (\mathbf{u}, p) が問題 6.1 の解のとき, 任意の $(\mathbf{v}, q) \in U \times P$ に対して,

$$\mathcal{L}_M(\phi, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}, q) = 0$$

がなりたつ.

§6.2 平均流れ抵抗最小化問題

平均流れ抵抗と領域の大きさ制約に対する評価関数を

$$f_0(\phi, \mathbf{u}, p) = - \int_{\Omega(\phi)} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dx + \int_{\partial\Omega(\phi)} \mathbf{u}_D \cdot (\mu \partial_\nu \mathbf{u} - p \boldsymbol{\nu}) \, d\gamma \quad (6.6)$$

$$f_1(\phi) = \int_{\Omega(\phi)} dx - c_1 \quad (6.7)$$

とおく.

問題 6.2 (平均流れ抵抗最小化問題)

f_0 と f_1 に対して,

$$\min_{\phi \in \mathcal{D}} \{ f_0(\phi, \mathbf{u}, p) \mid f_1(\phi) \leq 0, (\tilde{\mathbf{u}}, p) \in \mathcal{S} \times \mathcal{Q}, \text{問題 6.1} \}$$

をみたす $\Omega(\phi)$ をもとめよ.

§6.3 評価関数の形状微分

$f_0(\phi, \mathbf{u})$ の Lagrange 関数を

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_0(\phi, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0) &= f_0(\phi, \mathbf{u}, p) - \mathcal{L}_M(\phi, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}, q) \\
 &= \int_{\Omega(\phi)} \{ \mu \nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{v}_0^T - p \nabla \cdot \mathbf{v}_0 - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}) - q_0 \nabla \cdot \mathbf{u} \} dx \\
 &\quad - \int_{\partial\Omega(\phi)} \{ (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \cdot (\mu \partial_\nu \mathbf{v}_0 - q_0 \boldsymbol{\nu}) + (\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_D) \cdot (\mu \partial_\nu \mathbf{u} - p \boldsymbol{\nu}) \} d\gamma
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

とおく.

関数の形状微分公式をもちいた形状微分

b と u_D は物質固定であると仮定する.

\mathcal{L}_0 の形状微分は, 任意の $(\varphi, \mathbf{u}', p', \mathbf{v}'_0, q'_0) \in X \times (U \times P)^2$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_0(\phi, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0) [\varphi, \mathbf{u}', p', \mathbf{v}'_0, q'_0] &= \mathcal{L}_{0\phi}(\phi, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0) [\varphi] \\ &+ \mathcal{L}_{0\mathbf{u}, p}(\phi, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0) [\mathbf{u}', p'] + \mathcal{L}_{0\mathbf{v}_0, q_0}(\phi, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0) [\mathbf{v}'_0, q'_0] \end{aligned} \quad (6.9)$$

とかける.

関数の形状微分公式をもちいた形状微分 (cnt.)

式 (6.9) の右辺第 3 項は,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{0\mathbf{v}_0, q_0}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)[\mathbf{v}'_0, q'_0] &= -\mathcal{L}_{M\mathbf{v}_0, q_0}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)[\mathbf{v}'_0, q'_0] \\ &= -\mathcal{L}_M(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}'_0, q'_0)\end{aligned}\quad (6.10)$$

となる. 式 (6.10) は主問題 (問題 6.1) の Lagrange 関数になっている. そこで, (\mathbf{u}, p) が主問題の弱解ならば, 式 (6.9) の右辺第 3 項は 0 となる.

関数の形状微分公式をもちいた形状微分 (cnt.)

また、式 (6.9) の右辺第 2 項は、 (\mathbf{u}, p) の任意の変動 $(\mathbf{u}', p') \in U \times P$ に対して、

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}_{0\mathbf{u},p}(\phi, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)[\mathbf{u}', p'] \\
 &= \int_{\Omega(\phi)} \{ \mu (\nabla \mathbf{u}'^T) \cdot \nabla \mathbf{v}_0^T - p' \nabla \cdot \mathbf{v}_0 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}' - q_0 \nabla \cdot \mathbf{u}' \} dx \\
 &\quad - \int_{\partial\Omega(\phi)} \{ \mathbf{u}' \cdot (\mu \partial_\nu \mathbf{v}_0 - q_0 \boldsymbol{\nu}) + (\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_D) \cdot (\mu \partial_\nu \mathbf{u}' - p' \boldsymbol{\nu}) \} d\gamma \\
 &= -\mathcal{L}_M(\phi, \mathbf{v}_0, q_0, \mathbf{u}', p')
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

となる。そこで、**自己随伴**関係

$$(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{v}_0, q_0) \tag{6.12}$$

がなりたつとき、式 (6.9) の右辺第 2 項は 0 となる。

関数の形状微分公式をもちいた形状微分 (cnt.)

さらに、式 (6.9) の右辺第 1 項は、

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{0\phi'}(\phi, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)[\varphi] &= \int_{\Omega(\phi)} [-\mu \nabla \mathbf{u}^T \cdot (\nabla \varphi^T \nabla \mathbf{v}_0^T) \\
 &\quad - \mu \nabla \mathbf{v}_0^T \cdot (\nabla \varphi^T \nabla \mathbf{u}^T) \\
 &\quad + p (\nabla \varphi^T \nabla) \cdot \mathbf{v}_0 + q_0 (\nabla \varphi^T \nabla) \cdot \mathbf{u} \\
 &\quad + \{\mu \nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{v}_0^T - p \nabla \cdot \mathbf{v}_0 - q_0 \nabla \cdot \mathbf{u} - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}_0)\} \nabla \cdot \varphi] dx \\
 &\quad - \int_{\partial\Omega(\phi)} [\{(\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \cdot \mathbf{w}(\varphi, \mathbf{v}_0, q_0) + (\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_D) \cdot \mathbf{w}(\varphi, \mathbf{u}, p)\} \\
 &\quad + \{(\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \cdot (\mu \partial_\nu \mathbf{v}_0 - q_0 \boldsymbol{\nu}) \\
 &\quad + (\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_D) \cdot (\mu \partial_\nu \mathbf{u} - p \boldsymbol{\nu})\} (\nabla \cdot \varphi)_\tau] d\gamma
 \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\mathbf{w}(\varphi, \mathbf{u}, p)$$

関数の形状微分公式をもちいた形状微分 (cnt.)

$$= \left\{ (\mu \nabla \mathbf{u}^T)^T - p \mathbf{I} \right\} \left[\left\{ \boldsymbol{\nu} \cdot (\nabla \varphi^T \boldsymbol{\nu}) \right\} \boldsymbol{\nu} - \left\{ \nabla \varphi^T + (\nabla \varphi^T)^T \right\} \boldsymbol{\nu} \right] \quad (6.13)$$

とおいた。さらに,

$$(\nabla \varphi^T \nabla) \cdot \mathbf{v}_0 = (\nabla \mathbf{v}_0^T)^T \cdot \nabla \varphi^T = \mathbf{I} \cdot (\nabla \varphi^T \nabla \mathbf{v}_0^T) \quad (6.14)$$

がなりたつことをつかえば,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0\phi'}(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\varphi] &= \int_{\Omega(\phi)} \left[-(\mu \nabla \mathbf{u}^T - p \mathbf{I}) \cdot (\nabla \varphi^T \nabla \mathbf{v}_0^T) \right. \\ &\quad - (\mu \nabla \mathbf{v}_0^T - q_0 \mathbf{I}) \cdot (\nabla \varphi^T \nabla \mathbf{u}^T) \\ &\quad \left. + \left\{ (\mu \nabla \mathbf{u}^T - p \mathbf{I}) \cdot \nabla \mathbf{v}_0^T - q_0 \nabla \cdot \mathbf{u} - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}_0) \right\} \nabla \cdot \varphi \right] dx \\ &\quad - \int_{\partial\Omega(\phi)} \left[\left\{ (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \cdot \mathbf{w}(\varphi, \mathbf{v}_0, q_0) + (\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_D) \cdot \mathbf{w}(\varphi, \mathbf{u}, p) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \cdot (\mu \partial_\nu \mathbf{v}_0 - q_0 \boldsymbol{\nu}) \right\} \right] \end{aligned}$$

関数の形状微分公式をもちいた形状微分 (cnt.)

$$+ (\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_D) \cdot (\mu \partial_\nu \mathbf{u} - p \boldsymbol{\nu}) \} (\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi})_\tau] d\gamma \quad (6.15)$$

となる.

以上の結果より,

$$\begin{aligned} \tilde{f}'_0(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}] &= \mathcal{L}_{0\boldsymbol{\phi}'}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}, p, \mathbf{v}_0, q_0)[\boldsymbol{\varphi}] = \langle \mathbf{g}_0, \boldsymbol{\varphi} \rangle \\ &= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} (\mathbf{G}_{\Omega_0} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}^T + g_{\Omega_0} \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}) dx \end{aligned} \quad (6.16)$$

のようにかかる。ここで,

$$\mathbf{G}_{\Omega_0} = -2\mu \nabla \mathbf{u}^T (\nabla \mathbf{u}^T)^T, \quad (6.17)$$

$$g_{\Omega_0} = \mu \nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{u}^T - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \quad (6.18)$$

となる.

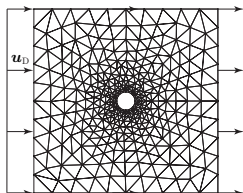
関数の形状微分公式をもちいた 2 階形状微分

$\mathbf{b} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$ を仮定する. (ϕ, \mathbf{u}, p) の任意変動 $(\varphi_1, \mathbf{u}'_1, p'_1) \in X \times U \times P$ と $(\varphi_2, \mathbf{u}'_2, p'_2) \in X \times U \times P$ に対する \tilde{f}_0 の 2 階形状微分は,

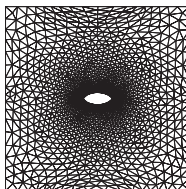
$$\begin{aligned}
 & h_0(\phi, \mathbf{u}, p, \mathbf{u}, q_0)[\varphi_1, \varphi_2] \\
 &= \int_{\Omega(\phi)} \left[-(\mu \nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{u}^T) \left\{ (\nabla \varphi_2^T)^T \cdot \nabla \varphi_1^T + (\nabla \cdot \varphi_2)(\nabla \cdot \varphi_1) \right\} \right. \\
 &\quad - \mu \nabla \mathbf{u}^T (\nabla \mathbf{u}^T)^T \cdot \left\{ \left(\nabla \varphi_1^T (\nabla \varphi_2^T)^T + \nabla \varphi_2^T (\nabla \varphi_1^T)^T \right) \right\} \\
 &\quad \left. + 2\mu \nabla \mathbf{u}^T (\nabla \mathbf{u}^T)^T \cdot \left\{ \nabla \varphi_2^T (\nabla \cdot \varphi_1) + \nabla \varphi_1^T (\nabla \cdot \varphi_2) \right\} \right] dx \\
 & \hspace{20em} (6.19)
 \end{aligned}$$

となる.

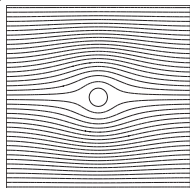
§6.4 数値例



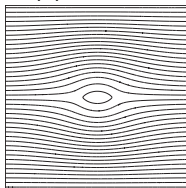
(a) 初期形状と境界条件



(b) 最適形状



(c) 初期形状に対する流線



(d) 最適形状に対する流線

図 6.2: 2次元 Stokes 流れ場の形状最適化問題に対する数値例

7 まとめ

- ① 簡単な最適設計問題をつかって、勾配法と Newton 法とはどのような方法かを復習した。
- ② 線形弾性体と Stokes 流れ場の密度型位相最適化問題における評価関数の 2 階 θ 微分をもとめた。
- ③ 線形弾性体と Stokes 流れ場の領域変動型形状最適化問題で定義された評価関数の 2 階形状微分をもとめた。
- ④ それらを使った H^1 Newton 法はうまくいくのかについて、これまでにえられた結果を紹介した。

参考文献

[1] 畔上 秀幸.

形状最適化問題の正則化解法.

日本応用数理学会論文誌, 23(2):83–138, 6 2014.