

粘菌方程式の今～量子化する爆発機構*

鈴木貴 (阪大・基礎工)

孢子中に閉じ込められた細胞性粘菌の生命は、水分や養分と出会うことによってその封印を解かれ、粘菌は食物であるアメーバを取り込んで急激な増殖を開始する。しかしやがて化学物質を排出して自らを誘引すると、24時間後に1つの組織体である孢子の中にその生命を再び封印する。このように、細胞性粘菌は単細胞生物でありながら「一生」を持つ特異な存在である。粘菌方程式は、このような細胞性粘菌の生態を制御する1つの要素である走化性を記述するものであり、近年は腫瘍形成の数理モデルとして、また古くは物質輸送の基礎方程式として、さまざまな分野で発見されてきた。一方最近の数学解析は、この問題が生命論や宇宙論と深く関連付けられることを強く示唆している。

この問題は半線形であり、無限小で線形近似が働く一方、非線形性は大域的現象の中にその本質を開示する。一般に解がある有限時刻を越えて延長できないことを爆発といい、解の空間分布がいくつかの場所に局在化してくることを凝縮という。凝縮は自然界における臨界現象やパターン形成の一つの要因であり、粘菌方程式では解が凝縮することによって爆発が誘導される。このとき、凝縮が基本的な単位のコピーの集合として実現される現象(量子化)と、その帰結としてエントロピーが爆発包の縁に吐き出され、自由エネルギーが時空間に局所的に閉じ込められる現象(創発)が実現される。これらの死と再生に関する自己組織化、すなわち自己集合形成の原理を数学的に証明することが本講義の目的である。

第1回 マクロな記述

質量保存という粘菌方程式の特徴をそのマクロな導出と絡めて説明し、格子点上の粒子のランダムな運動と走化性との関係を明らかにする。

勾配、拡散、走化性、現象論的關係式、マスター方程式、Kramers-Moyal 展開

* 応用数理特別講義 III, 東京大学駒場キャンパス・数理科学研究科棟・123 講義室, 11月13日(月) - 11月17日(金) 14:40-16:40

第2回 非平衡性と変分構造

粘菌方程式が、非平衡熱力学の法則に従って導出されたものであることを明らかにし、定常状態を正しく定義するとともに、それが場と粒子に関する双対的な変分構造に従っていることを述べる。

エントロピー, Boltzmann 原理, 自由エネルギー, Legendre 変換, 双対変分構造, 緩和時間

第3回 定常状態の量子化

次元解析から collapse 形成のための空間次元が2であることを明らかにし、次いで非線形固有値問題として実現される定常状態において質量量子化の爆発機構が実現されていること、そのことから非定常状態における collapse の形成と質量量子化が示唆されることを示す。

指数型非線形固有値問題と2次元拡散, 質量量子化と複素構造, 特異極限の分類, スケーリングと blowup analysis

第4回 閾値-非定常状態の大域的制御

自由エネルギーと2次モーメントの二つから、非定常解の時間大域存在に関する全質量の閾値が得られることを示し、量子化する爆発機構の糸口が得られることを証明する。

Trudinger-Moser 不等式, 2次モーメント, 閾値 (threshold), Green 関数の境界挙動

第5回 階層とスケーリング

弱形式と局所化の方法によって collapse の形成を証明し、平均場階層が示唆するスケーリング則によって collapse 質量の量子化が証明されることを述べる。

弱解の生成, 平均場階層, 自己相似性, 爆発包, 階層的議論, 量子化, 創発性, 集合速度の分類

参考図書

T. Suzuki, *Free Energy and Self-Interacting Particles*, Birkhäuser, Boston, 2005.