

鈴木研究室 虎の巻

提出日 : 2007 年 1 月 10 日 水曜日

2006 年度担当者 : M2 鈴木伸幸

目 次

1	多次元の部分積分	1
2	関数の台と関数の境界へのトレース	4
3	各種の埋め込み定理	5

1 多次元の部分積分

次の Gauss の発散公式を既知とする。

Gauss の発散公式

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$: 領域

$\partial\Omega$: Ω の境界, C^1 級

$\overline{\Omega}$: Ω の閉包

$v : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$: C^1 級ベクトル場

ν : $\partial\Omega$ 上外向き単位法ベクトル

dS : $\partial\Omega$ の面積要素

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot v \, dx = \int_{\partial\Omega} \nu \cdot v \, dS \quad \textcircled{1}$$

Gauss の発散公式は次の微分積分学の基本定理と同値。

i.e. Gauss の発散公式が成立 $\iff$ 微分積分学の基本定理が成立

微分積分学の基本定理

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$: 領域

$\partial\Omega$: Ω の境界, C^1 級

$\overline{\Omega}$: Ω の閉包

$u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$: C^1 級スカラー場

$\nu = {}^t(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$: $\partial\Omega$ 上外向き単位法ベクトル

dS : $\partial\Omega$ の面積要素

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} u \, dx = \int_{\partial\Omega} \nu_j u \, dS \quad (j = 1, 2, 3) \quad \textcircled{2}$$

同値性の証明

($\implies$)

$\forall j \in \{1, 2, 3\}$: fix.

与えられた $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$: C^1 級スカラー場 に対して

$v = (\delta_{ij} u)_{i=1}^3$ とおく $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$: Kronecker のデルタ

i.e. v は第 j 成分が u で他の成分が 0 のベクトル場

$v : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$: C^1 級ベクトル場

v に Gauss の発散公式を適用し $\textcircled{2}$ 式を得る

($\impliedby$)

与えられた $v = {}^t(v_1, v_2, v_3) : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$: C^1 級ベクトル場 に対して

$v_j : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$: C^1 級スカラー場 ($j = 1, 2, 3$) より

各成分に微分積分学の基本定理を適用

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \, dx = \int_{\partial\Omega} \nu_j v_j \, dS \quad (j = 1, 2, 3)$$

辺々 $\sum_{j=1}^3$ をとり $\textcircled{1}$ 式を得る

証明終

注.

Gauss の発散公式と微分積分学の基本定理は、
どちらも $\mathbb{R}^3$ に限らず、より一般に $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) で成立、互いに同値。
とくに 1 次元では、定理は次のようになる。

微分積分学の基本定理 (1 次元)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : C^1$ 級

$$\nu(x) = \begin{cases} -1 & (x = a) \\ +1 & (x = b) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x) dx &= \sum_{x=a,b} \nu(x) f(x) \\ &= [f(x)]_a^b \\ &= f(b) - f(a) \quad \textcircled{3} \end{aligned}$$

$u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : C^1$ 級に対して

③式 で $f = uv$ とおくと部分積分の公式 (1 次元) が得られる。

$$\begin{aligned} \int_a^b (u'v + uv') dx &= [u(x)v(x)]_a^b \\ \int_a^b u'(x)v(x) dx &= [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx \quad \textcircled{4} \end{aligned}$$

同様の計算により、 n 次元の微分積分学の基本定理から
部分積分の公式が得られる。

部分積分の公式

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$: 領域

$\partial\Omega$: Ω の境界, C^1 級

$\bar{\Omega}$: Ω の閉包

$\varphi, \psi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} : C^1$ 級スカラー場

$\nu = {}^t(\nu_1, \dots, \nu_n)$: $\partial\Omega$ 上外向き単位法ベクトル

dS : $\partial\Omega$ の面積要素

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \psi dx = \int_{\partial\Omega} \nu_j \varphi \psi dS - \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx \quad j = 1, \dots, n \quad \textcircled{5}$$

証明

$\forall j \in \{1, \dots, n\} : \text{fix.}$

積 $\varphi\psi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} : C^1$ 級スカラー場 に対して

微分積分学の基本定理 (n 次元) を適用

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \psi + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) dx = \int_{\partial\Omega} \nu_j \varphi \psi dS$$

左辺の第 2 項を移項して ⑤ 式を得る

証明終

注.

⑤ 式の右辺第 1 項は境界積分となる。

注.

本文で「微分積分学の基本定理」と書いた定理の正確な名称を
実は作成者自身知らない。

混乱のないよう配慮したつもりである。

[1] では「the formula of integration by parts」と書かれている。

[2] では「Gauss-Green Theorem」と書かれている。

参考文献

[1] Takasi Senba-Takashi Suzuki, 「Applied Analysis」,Imperial College Press,2004,p.18-19

[2] Lawrence C.Evans, 「Partial Differential Equations」 Graduate Studies in Mathematics
Volume 19,American Mathematical Society,1998,p.626-628

2 関数の台と関数の境界へのトレース

鋭意作成中です。

3 各種の埋め込み定理

鋭意作成中です。