循環するハミルトニアン

鈴木　貴（阪大・基）

A. 平均場方程式

正準統計

$\mathbf{R}^{6N}/\{T\}$　正準集団

$\beta = 1/(kT)$　逆温度

$$d\mu^{\beta,N} = \frac{e^{-\beta H}dx}{Z(\beta,N)}$$

$$Z(\beta,N) = \int_{\mathbf{R}^{6N}} e^{-\beta H}dx$$

小正準統計

H 全エネルギー

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \ 1 \leq i \leq N$$

$\mathbf{R}^{6N}/\{H\}$　小正準集団

$x = (q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N)$

$dx = dH \cdot \dfrac{d\Sigma(H)}{|\nabla H|}$

$d\Sigma(H) \leftrightarrow \{x \in \mathbf{R}^{6N} \mid H(x) = H\}$

熱平衡

$$\beta = \frac{\partial}{\partial H}\log\Omega(H)$$

$$d\mu^{H,N} = \frac{1}{\Omega(H)} \cdot \frac{d\Sigma(H)}{|\nabla H|}$$

$$\Omega(H) = \int_{\{H(x)=H\}} \frac{d\Sigma(H)}{|\nabla H|}$$

ハミルトニアン→Gibbsの平衡統計

等重率の仮定　　N→∞ … 平均場極限

Onsager49
2D Euler 運動方程式
単連結領域

$$v_t + (v\cdot\nabla)v = -\nabla p$$
$$\nabla\cdot v = 0 \text{ in } \Omega\times(0,T)$$
$$\nu\cdot v = 0 \text{ on } \partial\Omega\times(0,T)$$

$$\omega = \nabla\times v$$
$$\omega(dx,t) = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i\delta_{x_i(t)}(dx)$$

渦度場方程式

$$\frac{dx_i}{dt} = \nabla_{x_i}^{\perp}H_N$$
$$H_N(x_1,\ldots,x_N) =$$
$$\sum_i \frac{\alpha_i^2}{2}R(x_j) + \sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j G(x_i,x_j)$$

$\alpha_i = \alpha,\ N\uparrow+\infty$ 高エネルギー極限

$\Rightarrow$

$$\rho = \frac{e^{-\beta\psi}}{\int_\Omega e^{-\beta\psi}}$$ 粒子密度

$\updownarrow$

$$\psi = \int_\Omega G(\cdot,x')\rho(x')dx' \text{ in } \Omega$$ 流れ関数

$$\lambda = -\beta$$ 平均場方程式

負の逆温度で顕著に現出する秩序構造

$G = G(x,x')$ Green 関数
$$R(x) = \left[G(x,x') + \frac{1}{2\pi}\log|x-x'|\right]_{x'=x}$$
Robin 関数

平均場方程式の導出

$$\rho_1^n(x_i)dx$$
$$= \int_{\Omega^{n-1}}\mu^n(dx_1\cdots dx_{i-1}dx_{i+1}dx_n)$$ 1点 pdf

小正準測度
[等重率の仮定]

$$\rho(x_1,\cdots,x_k)dx_1\cdots dx_k$$
$$= \int_{\Omega^{n-k}}\mu^n(dx_{k+1}\cdots dx_n)$$ k点 pdf

$$\langle\omega_n(x)\rangle = \left\langle\sum_{i=1}^n \alpha\delta_{x_i}(dx)\right\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^n\int_{\Omega^n}\alpha\delta(x_i-x)\mu^n(dx_1\cdots dx_n)$$
$$= n\alpha\rho_1^n(x)$$

2強度系
Joyce-Montgomery 73

正準測度
Pointin-Lundgren 76

$$\lim_{n\to\infty}\langle\omega_n(x)\rangle = \rho(x) = \lim_{n\to\infty}\rho_1^n(x)$$ 平均場極限

$$\rho_k^n \rightharpoonup \rho^{\otimes k} = \Pi_{i=1}^k\rho(x_i)$$ カオスの伝播

Caglioti-Lions-Marchioro-Pulvirenti 92, 95

Kiessling 93

a) relative Boltzmann factors $\{Z\}$ 有界

b) 平均場方程式の一意解の存在

定理 [S. 92]

$0 < \lambda < 8\pi \Rightarrow$ 一意解存在

平均場方程式

$\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 有界領域, $\partial\Omega$ 滑らか, $\lambda > 0$ 定数

$-\Delta v = \dfrac{\lambda e^v}{\int_\Omega e^v}$ in Ω, $v = 0$ on $\partial\Omega$

Onsagerの点渦平均場方程式（流れ関数）

$\Rightarrow$ （正準統計）

1) 極限への収束

2) 平均場での正準・小正準集団の同等性

3) カオスの伝播の実現

a), b) OK if $\lambda < 8\pi$

$\lambda \geq 8\pi$?

定理 [Nagasaki-S. 90]

$\{(\lambda_k, v_k)\}$ 解の列

$\lambda_k \to \lambda_0 \in (0, \infty)$, $\|v_k\|_\infty \to \infty$

$\Rightarrow$

$\lambda_0 = 8\pi\ell$, $\ell \in \mathbf{N}$

$^\exists$ 部分列 $^\exists\mathcal{S} \subset \Omega$, $\sharp\mathcal{S} = \ell$

$v_k \to v_0$ 局所一様 in $\overline{\Omega} \setminus \mathcal{S}$

$v_0(x) = 8\pi \sum_{x_0 \in \mathcal{S}} G(x, x_0)$ 特異極限

$\mathcal{S} = \{x_1^*, \ldots, x_\ell^*\}$ 爆発集合

$$\nabla_{x_i} H_\ell |_{(x_1,\cdots,x_\ell)=(x_1^*,\cdots,x_\ell^*)} = 0, \ 1 \leq i \leq \ell$$

$$H_\ell(x_1, \ldots, x_\ell) = \frac{1}{2}\sum_i R(x_i) + \sum_{i<j} G(x_i, x_j)$$

$\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 有界領域, $\partial\Omega$ 滑らか, $\lambda > 0$ 定数

$-\Delta v = \dfrac{\lambda e^v}{\int_\Omega e^v}$ in Ω, $v = 0$ on $\partial\Omega$

循環的階層
量子化する爆発機構
場と粒子の双対性

1. non-radial bifurcation on annulus
(S.S. Lin 89, Nagasaki-S. 90)

2. spherical mean value theorem
(S. 90)

3. localization
(Brezis-Merle 91)

4. entire soltion
(Chen-Li 91)

5. sup + inf inequality
(Shafrir 92)

6. singular perturbation
(S. 93, Baraket-Pacard 98)

7. blowup analysis
(Li-Shafrir 94)

8. Chern-Simons theory
(Tarantello 96)

9. global bifurcation
(Mizoguchi-S. 97, Chang-Chen-Lin 03)

10. mimi-max solution
(Ding-Jost-Li-Wang 99)

11.local estimate
(Y.Y. Li 99)

12. variable coefficient
(Ma-Wei 01)

13. refined aysmptotics
(C.C. Chen- C.S. Lin 02)

14. topological degree
(Chen-Lin 03, Malchiodi 08)

15. asymptotic non-degeneracy
(Gladiali-Grossi 04, Grossi-Ohtsuka-S.)

16. isoperimetric profile
(Lin-Lucia 06)

17. Morse index
(Gladiali-Grossi 09)

続々発見される新しい構造と技法, その応用

まとめ 1　（点渦平均場方程式）

1. 一意性→カオスの伝播 (92)
2. ハミルトニアン→特異極限 (90)
3. 特異極限→古典解 (98)
4. 境界条件→爆発点衝突の回避 (94)
5. 量子化する爆発機構→非量子化質量下での位相不変性 (03)

ハミルトニアンの精密な制御

幾何的背景 (Liouville 積分）

$\lambda = \sigma \int_\Omega e^v, \ -\Delta v = \sigma e^v$

$\Rightarrow$

$^\exists F = F(z)$ 有理型

$z \in \Omega \subset \mathbf{R}^2 \cong \mathbf{C}$, s.t.

$$\rho(F) = \left(\frac{\sigma}{8}\right)^{1/2} e^{v/2} = \frac{|F'|}{1+|F|^2}$$

球面導関数

Onsager 方程式

$\Leftrightarrow \ \rho(F)|_{\partial\Omega} = \left(\frac{\sigma}{8}\right)^{1/2}$

等角はめ込み

$\sqrt{8}F : \Omega \to S^2$

$\left.\frac{d\Sigma}{ds}\right|_{\partial\Omega} = \sigma^{1/2}$

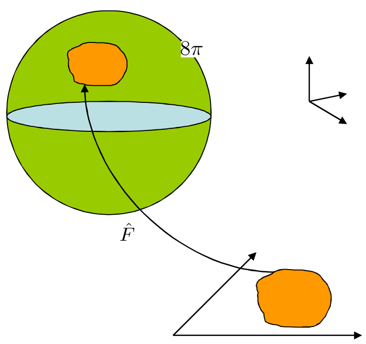
$(S^2, d\Sigma)$　球面 $|S^2| = 8\pi$

$$\int_\Omega \left(\frac{d\Sigma}{ds}\right)^2 dx = 8\int_\Omega \rho(F)^2 dx = \int_\Omega \sigma e^v$$

…　$\sqrt{8}F(\Omega)$ のはめ込み面積

$\lambda = \int_\Omega \sigma e^v \to 8\pi\ell \Rightarrow \ell$-covering

… 質量量子化



B. 調和写像

(Ω, g) m-コンパクト多様体

$N \hookrightarrow \mathbf{R}^n$ コンパクト多様体, $\partial N = \emptyset$

$H^1(\Omega, N)$

$= \{u \in H^1(\Omega, \mathbf{R}^n) \mid u \in N, \text{ a.e. on } \Omega\}$

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2$$

$u \in H^1(\Omega, N)$ 調和写像

$\Leftrightarrow$ (定義)

$^\forall \phi \in C^\infty(\Omega, \mathbf{R}^n)$

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon} E(\Pi(u + \varepsilon\phi))\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

$\Pi : U \to N$ 最短距離射影

U: N の管状近傍

$m = 2$

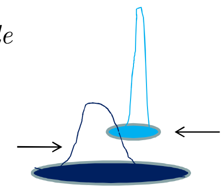
$\Rightarrow$

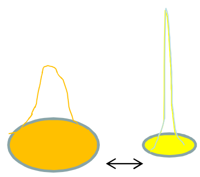
エネルギー量子化

$^\exists$*bubble on bubble*

$^\exists$*separated bubble*

$\to$ *bubble tree*





定理 $(m = 2)$

$\{u_k\}_k$ 調和写像

$\sup_k E(u_k) < +\infty$

$\Rightarrow$ (部分列)

$u_k \rightharpoonup u$ in $H^1(\Omega, N)$ 調和写像

$$u_k = u + \sum_{j=1}^{p} \left[\omega^j((\cdot - x_k^j)/\delta_k^j) - \omega^j(\infty)\right]$$

$+o(1)$ in $H^1(\Omega, N)$

$$\max_{i \neq j} \left\{ \frac{\delta_k^i}{\delta_k^j}, \frac{\delta_k^j}{\delta_k^i}, \frac{\left|x_k^i - x_k^j\right|}{\delta_k^i + \delta_k^j} \right\} \to +\infty$$

$\{x_k^1\}_k, \cdots, \{x_k^p\}_k \subset \Omega$, $p \in \mathbf{N}$

$\{\delta_k^1\}, \cdots, \{\delta_k^p\} \downarrow 0$

$\{\omega^1\}, \cdots, \{\omega^p\} : S^2 \to N$

非定数調和写像

$$\lim_{k\to\infty} E(u_k) = E(u) + \sum_{j=1}^{p} E_0(\omega^j)$$

$$E_0(\omega) = \frac{1}{2}\int_{S^2} |\nabla \omega|^2$$

1. bubble on bubble $i \neq j$

$$\frac{\delta_k^i}{\delta_k^j} \to 0$$

2. separated bubble $i \neq j$

$$\frac{\left|x_k^i - x_k^j\right|}{\delta_k^i + \delta_k^j} \to +\infty$$

まとめ 2　（調和写像）

1. 2 次元定義域の調和写像はエネルギー量子化
2. エネルギー粒子の衝突
3. ハミルトニアンの制御？

動的統計力学～初期設定された系の時間変化

孤立系	エネルギー一定	エントロピー増大	小正準集団
閉じた系	温度一定	ヘルムホルツ自由エネルギー減少	正準集団
開放系	圧力一定	ギブス自由エネルギー減少	大正準集団

熱力学

ボトムアップ ↑　↓ トップダウン

統計力学

ハミルトン系→粒子の衝突→エントロピー増大

平衡状態での同等性

C. Smoluchowski-Poisson 方程式
～粒子の移動

I. ボトムアップモデリング

1. 輸送理論（Debye）

マスター方程式 $\Rightarrow$

Fokker-Planck 方程式

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial v}\left[-F+\gamma v+\frac{D}{m^2}\frac{\partial}{\partial v}\right]P$$

Smoluchowski 方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{1}{\gamma m}\frac{\partial}{\partial x}\left(-Kf+kT\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$f(x,t)=\int P(x,v,t)dv,\ F=K/m$$

$P(x_2,t_2\mid x_1,t_1)$ 存在確率（粒子密度）
$F(x)$ 外力 （勾配）

半導体物理学
高分子化学

2. カイネティック理論 (Chavanis)

カイネティック方程式 $\Rightarrow$

$$\mu_t=\nabla[D_*\cdot(\nabla p+\mu\nabla\varphi)]$$
$$\Delta\varphi=\mu$$

$\mu=\mu(x,t)$ 粒子密度
$\varphi=\varphi(x,t)$ ポテンシャル
$p=p(\mu,\theta)$ 圧力, θ 温度

Smoluchowski-Poisson 方程式

粒子密度の時間発展を規定する流束
＝拡散項＋粒子密度×内部相互作用力

内部相互作用力
＝粒子の作り出すポテンシャル（場）の勾配

天体物理学

Reinforced Random Walk

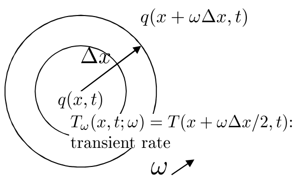
Ichikawa-Rouzi-S.
Othmer-Stevens 97

障害モデル（正規化）

$$\frac{1}{|\Delta t|}\int_{S^{N-1}}T_\omega(x,t)d\omega=\tau^{-1}$$

$$\frac{\tau}{\Delta t}T_\omega(x,t)$$
$$=\frac{T(x+\omega\frac{\Delta x}{2},t)}{\int_{S^{N-1}}T(x+\omega'\frac{\Delta x}{2},t)d\omega'}$$

$$T=T(x,t)$$



マスター方程式

$q=q(x,t)$ 粒子密度
$T=T_\omega(x,t)$ 遷移確率
$\omega\in S^{N-1}$ ジャンプ方向
Δt 計算時間, Δx ジャンプ巾

$$q(x,t+\Delta t)-q(x,t)=$$
$$\int_{S^{N-1}}T_{-\omega}(x+\omega\Delta x,t)q(x+\omega\Delta x,t)d\omega$$
$$-\int_{S^{N-1}}T_\omega(x,t)d\omega\cdot q(x,t)$$

Einstein の公式

$\Rightarrow$
$$\frac{\partial q}{\partial t}=D\nabla\cdot(\nabla q-q\nabla\log T)$$
$$\tau^{-1}(\Delta x)^2=2ND$$

Smoluchowski 方程式

～粒子密度の時間変化を規定する流束に現れる
遷移確率平均場

細胞数理生物学

II トップダウンモデリング

1) 補給-消費

$u_t = \alpha,\ v_t = -\beta$

2) 産生-消滅

$u_t = \alpha u,\ v_t = -\beta v$

3) 輸送

$u_t = -\nabla \cdot j$

j... 流束

4) 勾配

$j = -d_u \nabla u$... 拡散

$j = d_v u \nabla v$... 走化性

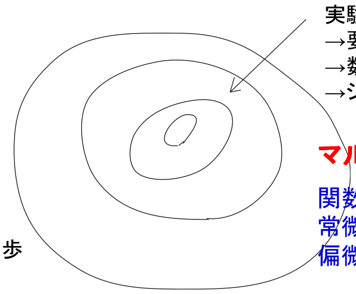
5) 化学反応

$A + B \to C\ (k)$

$\Rightarrow$ (質量作用)

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A][B]$$

$$\frac{d[B]}{dt} = -k[A][B]$$



実験からの知見
→要因の摘出
→数式を用いた統合
→シミュレーションによる検証

マルチスケール性

関数関係	信号伝達、知覚特性
常微分	化学反応
偏微分	物質輸送

原理と現象－数理モデリングの初歩
培風館(鈴木・山岸)

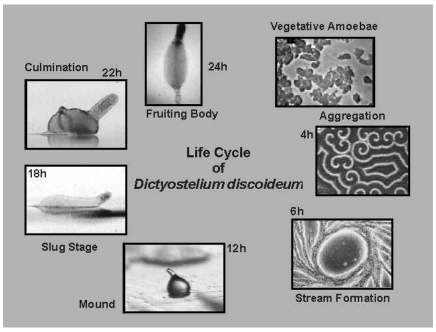
例題(細胞動力学)

Keller-Segel 70

$$\begin{aligned} u_t &= \nabla \cdot (d_1(u,v)\nabla u) - \nabla \cdot (d_2(u,v)\nabla v) \\ v_t &= d_v \Delta v - k_1 vw + k_{-1}p + f(v)u \\ w_t &= d_w \Delta w - k_1 vw + (k_{-1} + k_2)p \\ &\quad + g(v,w)u \\ p_t &= d_p \Delta p + k_1 vw - (k_{-1} + k_2)p \end{aligned}$$

$u = u(x,t)$ 細胞性粘菌
$v = v(x,t)$ 化学物質
$w = w(x,t)$ 酵素
$p = p(x,t)$ 複合体

1. 拡散 u, v, w, p
2. 走化性 $v \to u$
3. 産生 $u \to (v, w)$



4. 化学反応

$$V + W \underset{\leftarrow (k_{-1})}{\overset{(k_1)\ \to}{}} P \overset{(k_2)}{\to} W + A$$

$$\begin{aligned} v_t &= -k_1 vw + k_{-1}p \\ w_t &= -k_1 vw + (k_{-1} + k_2)p \\ p_t &= k_1 vw - (k_{-1} + k_2)p \end{aligned}$$

Michaelis-Menten

1. 準静的 $k_1 vw - (k_{-1}+k_2)p = 0$
2. 質量保存 $w + p = c$

$\Rightarrow$

$$u_t = \nabla\cdot(d_1(u,v)\nabla u) - \nabla\cdot(d_2(u,v)\nabla v)$$
$$v_t = d_v\Delta v - k(v)v + f(v)u$$
$$k(v) = \frac{ck_1k_2}{(k_{-1}+k_2)+k_1 v}$$

Smoluchowski-Poisson 方程式

Jäger-Luckhaus 92

$$u_t = \nabla\cdot(\nabla u - u\nabla v)$$
$$-\Delta v = u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u \text{ in } \Omega\times(0,t)$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega\times(0,T)$$
$$\int_\Omega v = 0$$

Nanjundiah 73

$d_1(u,v)$, $k(v)$, $f(v)$ 定数

$d_2(u,v) = u\chi'(v)$

$$u_t = d_u\Delta u - \nabla\cdot(u\nabla\chi(v))$$
$$v_t = d_v\Delta v - b_1 v + b_2 u$$

$\chi'(v)$　知覚関数

Smoluchowski-ODE 系

$$q_t = \nabla\cdot(\nabla q - q\nabla\varphi(v))$$
$$v_t = q \text{ in } \Omega\times(0,T)$$
$$\left.\frac{\partial q}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0,\ q|_{t=0} = q_0,\ v|_{t=0} = v_0$$

III Smolchowski-Poisson 方程式
- 量子化する爆発機構

$$u_t = \nabla\cdot(\nabla u - u\nabla v)$$
$$-\Delta v = u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u \quad \text{in } \Omega\times(0,T)$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega\times(0,T)$$
$$\int_\Omega v = 0, \quad \Omega\subset\mathbf{R}^n$$

定理 [collapse の生成]

$n = 2$, $T = T_{\max} < +\infty \Rightarrow$

$$u(x,t)dx \rightharpoonup \sum_{x_0\in\mathcal{S}} m(x_0)\delta_{x_0}(dx) + f(x)dx$$

as $t\uparrow T$ in $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$,

$$0 \le f = f(x) \in L^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega}\setminus\mathcal{S})$$
$$\mathcal{S} = \{x_0\in\overline{\Omega} \mid {}^{\exists}(x_k,t_k)\to(x_0,T) \text{ s.t. } u(x_k,t_k)\to+\infty\}$$

定理 [質量量子化]

$$m(x_0) = m_*(x_0) \equiv \begin{cases} 8\pi, & x_0\in\Omega \\ 4\pi, & x_0\in\partial\Omega \end{cases}$$

[$\|u(t)\|_1 = \|u_0\|_1 \Rightarrow$

$2\sharp(\mathcal{S}\cap\Omega) + \sharp(\mathcal{S}\cap\partial\Omega) \le \|u_0\|_1/(4\pi)$]

c.f. 爆発閾値

Senba-S. 01b

Biler 98

Gajewski-Zacharias 98

Nagai-Senba-Yoshida 97

Nagai 95

Childress-Percus 81

c.f. 凝縮

Senba-S. 01a

Herrero-Velázquez 96

Nanjundiah 73

IV. 双対変分構造 – 平衡状態におけるSmoluchowski-Poisson 方程式 と点渦平均場方程式 の同等性

X Banach 空間 $/\mathbf{R}$

$F : X \to (-\infty, +\infty]$ prop. c'x l.s.c.

$\Rightarrow$

Legendre 変換

$F^* : X^* \to (-\infty, +\infty]$ prop. c'x l.s.c.

$$F^*(p) = \sup_{x \in X} \{\langle x, p\rangle - F(x)\}$$

Fenchel-Moreau 双対

$$F^{**} = F$$

$$F^{**}(x) = \sup_{p \in X^*} \{\langle x, p\rangle - F^*(p)\}$$

Toland 双対 78, 79

$F, G : X \to (-\infty, +\infty]$ prop. c'x l.s.c.

$$J(x) = G(x) - F(x)$$

$$J^*(p) = F^*(p) - G^*(p)$$

SP方程式

自由エネルギー ←→ 場の汎関数

点渦平均場方程式

双対

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega u(\log u - 1) - \frac{1}{2}\left\langle (-\Delta)^{-1} u, u \right\rangle, \ \|u\|_1 = \lambda$$

$$\mathcal{J}_\lambda(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 - \lambda \log \int_\Omega e^v + \lambda(\log \lambda - 1)$$

粒子分布　　　　ポテンシャル密度

まとめ 3 (粒子の移動と非平衡熱力学)

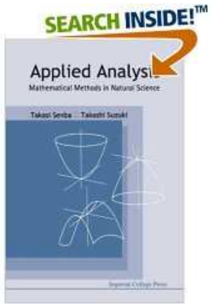
1. Keller-Segel 系 ... 走化性, 拡散, 産生, 消滅, 化学反応 (70)
2. 簡略化 → Smolchowski-Poisson 方程式, 粒子密度運動 (73)
3. 定常問題→爆発閾値の予測 (81), 証明 (95)
4. 量子化質量を持つ δ 関数の出現 (05)
5. 点渦系との双対... 定常 Smoluchowski-Poisson 方程式 (08)

TS, *Free Energy and Self-Interacting Particles* Birkhäuser, Boston, 05

H.A. Levine, "Book Review" Bull. AMS 44 (07) 139-145

Abstract

Smoluchowski-Poisson 方程式は粒子密度の時間変化に関する数理モデルで, 輸送・カイネティック理論から導出され, 物性物理学, 高分子化学, 細胞生物学, 天体物理学などにおいて用いられる．Toland 双対によってその定常状態は Onsager の点渦平均場方程式と同等であり, そこでは量子化された爆発機構が観察される．本講演ではそのことから予測された空間 2 次元の非定常 Smoluchowski-Poisson 方程式での質量量子化の証明, 関連する数理的対象, およびその背景にある原理を述べる．



Plan

1. 走化性方程式 - 質量と自由エネルギー (2)
2. 定常状態 - 循環的階層 (2)
3. 主結果 - 量子化する爆発機構 (1)
4. 爆発解析 - 階層的議論と部分正則性 (5)
5. 弱解とスケール極限 - 非定常質量量子化 (5)

T. Senba and T. Suzuki
Applied Analysis
Imperior College Press
London, scond edition, 2010

1. 走化性方程式 – 質量と自由エネルギー

$$u_t = \nabla \cdot (\nabla u - u\nabla v)$$
$$-\Delta v = u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u \quad \text{in } \Omega \times (0,T)$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega \times (0,T)$$
$$\int_\Omega v = 0, \quad \Omega \subset \mathbf{R}^2$$

2D-SP 方程式

$u \geq 0$ 　正値性

$$\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|_1 = \int_{\partial\Omega} \nu \cdot (\nabla u - u\nabla v) = 0$$

全質量保存

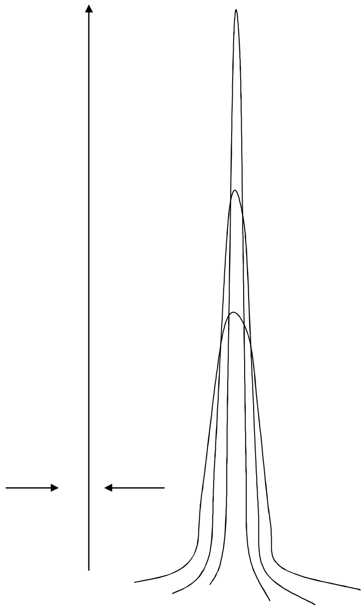
$$u_t = \nabla \cdot u\nabla(\log u - v)$$
$$v(\cdot,t) = \int_\Omega G(\cdot,x')u(x',t)dx'$$
$$\int_\Omega u_t(\log u - v) = -\int_\Omega u|\log u - v|^2$$
$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(\log u - 1) = \int_\Omega u_t \log u$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega\times\Omega} G(x,x')u\otimes u = \int_\Omega u_t v$$

ヘルムホルツ自由エネルギー減少

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u(t)) \leq 0$$
$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega u(\log u - 1) \quad \text{エントロピー項}$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega\times\Omega} G(x,x')u\otimes u \quad \text{内部エネルギー項}$$

L^1（全質量） 制御下の凝縮

$C'(\overline{\Omega}) \cong \mathcal{M}(\overline{\Omega}) \Rightarrow$ collapse の形成



定理 (Nagai-Senba-Yoshida 97 Biler 98, Gajewski-Zacharias 98)

$\|u_0\|_1 < 4\pi \ \Rightarrow T_{\max} = +\infty$

証明

双対 *Trudinger-Moser* 不等式

$\inf\{\mathcal{F}(u) \mid u \geq 0, \ \ \|u\|_1 = 4\pi\} > -\infty$

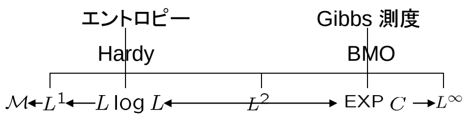
$+$ 全質量保存

$\lambda = \|u(t)\|_1 < 4\pi$

$\Rightarrow \sup_{t\geq 0} \|u(t)\|_{L \log L} < +\infty$

放物型正則性

$\Rightarrow T = +\infty, \sup_{t\geq 0} \|u(t)\|_\infty < +\infty$



2/15

2. 定常状態 – 循環的階層

$$u_t = \nabla\cdot u\nabla(\log u - v)$$

$$-\Delta v = u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u \ \ \text{in } \Omega\times(0,T)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega\times(0,T)$$

$$\int_\Omega v = 0, \quad \Omega\subset \mathbf{R}^2$$

定常状態

$\log u - v = \text{constant}$

$\|u\|_1 = \lambda$ 全質量

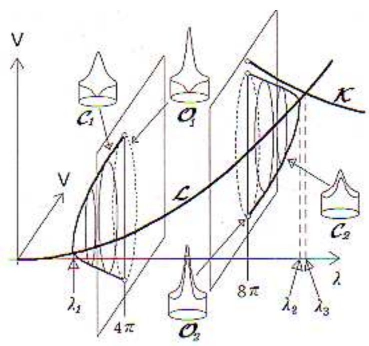
$\Rightarrow$

$$u = \frac{\lambda e^v}{\int_\Omega e^v}$$

$$-\Delta v = \lambda\left(\frac{e^v}{\int_\Omega e^v} - \frac{1}{|\Omega|}\right) \text{ in } \Omega$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega, \ \int_\Omega v = 0$$

… 点渦平均場方程式



Senba-S. 00

$\lambda = 8\pi \ (4\pi)$

… 内部 (境界) 爆発閾値質量

非線形スペクトル力学

3/15

爆発条件 $\longleftarrow$ **対称化** （弱形式）

定理 (Senba-S. 01)

$^\exists\eta > 0$ 絶対定数 s.t.

$x_0 \in \overline{\Omega}, \quad 0 < R \ll 1$

$$\frac{1}{R^2}\int_{\Omega \cap B_{2R}(x_0)} |x - x_0|^2 \, u_0(x)dx < \eta$$

$$\int_{\Omega \cap B_R(x_0)} u_0(x)dx > m_*(x_0)$$

$\Rightarrow$

$T = T_{\max} = o(R^2) < +\infty$

$$m_*(x_0) = \begin{cases} 8\pi, & x_0 \in \Omega \\ 4\pi, & x_0 \in \partial\Omega \end{cases}$$

$G(x', x) = G(x, x')$

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(\cdot,t)\varphi = \int_\Omega u(\cdot,t)\Delta\varphi$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega\times\Omega} \rho_\varphi(x,x')u(x,t)u(x',t)dxdx'$$

$$\varphi \in C^2(\overline{\Omega}), \ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\rho_\varphi(x,x') = \nabla\varphi(x)\cdot\nabla_x G(x,x')$$
$$+\nabla\varphi(x')\cdot\nabla_{x'} G(x,x') \in L^\infty(\Omega\times\Omega)$$

3. 主結果 – 量子化する爆発機構

2D Smoluchowski-Poisson 方程式

$u_t = \nabla\cdot(\nabla u - u\nabla\Gamma * u)$

$(x,t) \in \mathbf{R}^2 \times (0,T)$

$u|_{t=0} = u_0(x) > 0$

$\in L^1 \cap L^\infty \cap C(\mathbf{R}^2)$

$$\Gamma(x) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|x|}$$

$-\Delta\Gamma = \delta$

$$\Gamma * u = \int_{\mathbf{R}^2} \Gamma(\cdot - y)u(y)dy$$

定理 1 [collapse の形成]

$T = T_{\max} < +\infty$

$\Rightarrow$

$\sharp\mathcal{S} < +\infty$

$$u(x,t)dx \rightharpoonup \sum_{x_0\in\mathcal{S}} m(x_0)\delta_{x_0}(dx) + f(x)dx$$

$t \uparrow T$ in $\mathcal{M}(\mathbf{R}^2 \cup \{\infty\})$

$\mathcal{S} = \{x_0 \in \mathbf{R}^2 \cup \{\infty\} \mid {}^\exists(x_k,t_k) \to (x_0,T)$
s.t. $u(x_k,t_k) \to +\infty\}$ 爆発集合

$\mathcal{M}(\mathbf{R}^2 \cup \{\infty\}) = C'(\mathbf{R}^2 \cup \{\infty\})$

$0 \le f = f(x) \in L^1(\mathbf{R}^2) \cap C(\mathbf{R}^2 \setminus \mathcal{S})$

定理 2 [質量量子化]

$^\forall x_0 \in \mathcal{S}, \ m(x_0) = 8\pi$

まとめ 4（SP 方程式の変分構造）

$u_t = \nabla\cdot(\nabla u - u\nabla\Gamma * u)$

$(x,t)\in \mathbf{R}^2\times(0,T)$

$\Gamma(x) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|x|}$

$u|_{t=0} = u_0(x) > 0$
$\in L^1\cap L^\infty\cap C(\mathbf{R}^2)$

自由エネルギー $\Rightarrow$

$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_1 = 0$

$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u(t)) = -\int_{\mathbf{R}^2} u|\nabla(\log u - \Gamma * u)|^2$

$\mathcal{F}(u) = \int_{\mathbf{R}^2} u(\log u - 1) - \frac{1}{2}\langle\Gamma * u, u\rangle$

弱形式 $\leftarrow$ 自己相互作用の対称性

$\Gamma(x-x') = \Gamma(x'-x)$

$\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{R}^2}\varphi(x)u(x,t)dx$

$= \int_{\mathbf{R}^2}\Delta\varphi(x)\cdot u(x,t)dx$

$+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2}\rho_\varphi(x,x')u(x,t)u(x',t)dxdx'$

$\varphi\in C_b^2(\mathbf{R}^2)$

$\rho_\varphi(x,x')$

$= \nabla\Gamma(x-x')\cdot(\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(x'))$

$= -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{(\nabla\varphi(x)-\nabla\varphi(x'))\cdot(x-x')}{|x-x'|^2}$

$\in L^\infty(\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2)$

4. 爆発解析 – 階層的議論と部分正則性

自己相似変換

$u_\mu(x,t) = \mu^2 u(\mu x, \mu^2 t),\ \mu > 0$

$\leftrightarrow \|u(t)\|_1 = \|u_\mu(t)\|_1$

$\Leftrightarrow$

$n = 2$

$u_t = \nabla\cdot(\nabla u - u\nabla\Gamma * u)$

$(x,t)\in\mathbf{R}^n\times(0,T)$

$-\Delta\Gamma = \delta$

双対 Trudinger-Moser 不等式

$n = 2$

$\Rightarrow$

$\inf\{\mathcal{F}(u)\mid u\geq 0,\ \|u\|_1 = 8\pi\} > -\infty$

$\mathcal{F}(u) = \int_{\mathbf{R}^n} u(\log u - 1) - \frac{1}{2}\langle\Gamma * u, u\rangle$

臨界質量 $\lambda = 8\pi$

$u_\mu(x) = \mu^2 u(\mu x)\geq 0,\ \mu > 0$

$\Rightarrow$

$\|u_\mu\|_1 = \|u\|_1 \equiv \lambda$

$\mathcal{F}(u_\mu) = \left(2\lambda - \frac{\lambda^2}{4\pi}\right)\log\mu + \mathcal{F}(u)$

c.f. Kazdan-Warner-Nirenberg 問題

スケール不変性 → 爆発解析

例題

$1 < p < \infty$, $\mu > 0$

$-\Delta v = v^p$

$v_\mu(x) = \mu^{2/(p-1)} v(\mu x)$

$\Rightarrow$

$-\Delta v_\mu = v_\mu^p$

定理 [Gidas-Spruck 81]

$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 有界領域 $\partial\Omega$ 滑らか

$1 < p < \frac{n+2}{n-2}$

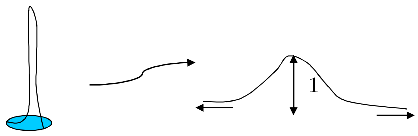
$\Rightarrow$

${}^\exists C > 0$ s.t.

$\|v\|_\infty \le C$, ${}^\forall v$ s.t.

$-\Delta v = v^p, \quad v > 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbf{R}^n$

$v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$



7/15

1. 背理法

${}^\exists \{v_k\}$

$-\Delta v_k = v_k^p$, $v_k > 0$ in Ω

$v_k = 0$ on $\partial\Omega$

$m_k = v_k(x_k) = \|v_k\|_\infty \to +\infty$

2. スケーリング

$\tilde{v}_k(x) = \mu_k^{\frac{2}{p-1}} v_k(\mu_k x + x_k)$

$\Rightarrow$

$\|\tilde{v}_k\|_\infty = \tilde{v}_k(0) = 1$

$\mu_k = m_k^{-\frac{2}{p-1}} \downarrow 0$

3. 楕円型正則性

$\Rightarrow$

${}^\exists$ スケール極限 $v = v(x)$

$-\Delta v = v^p$, $0 \le v \le v(0) = 1$ in $\mathbf{R}^n$

or

$-\Delta v = v^p$, $0 \le v \le v(0) = 1$ in $\mathbf{R}^n_+$

$v = 0$ on $\partial\mathbf{R}^n_+$

4. Liouville 性

$1 < p < \frac{n+2}{n-2}$

$\Rightarrow$

$\nexists$ スケール極限

8/15

ε-正則性 + 単調公式

$\Rightarrow$

部分正則性 (爆発点の有限性)

調和写像流 (例)

$\Omega = \mathbf{R}^2/a\mathbf{Z} \times b\mathbf{Z}$

$u = u(x,t)$:

$\Omega \times [0,T) \to S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$

$u_t - \Delta u = u\,|\nabla u|^2$

$|u| = 1$ in $\Omega \times (0,T)$

定理 (Struwe 85)

時間大域的 $^\exists$ H^1 弱解

$\Omega \times [0,+\infty)$ で有限個の特異点

$B_R = B(0,R)$

$E(u,R) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{B_R} |\nabla u|^2$

$E_0 = \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2$

ε-正則性

$^\exists\varepsilon_0 > 0$

$\sup_{t\in[0,T]} E(u(\cdot,t),B_R) < \varepsilon_0$

$\Rightarrow$

$u = u(x,t)$ 正則 in $B_{R/2} \times [0,T]$

単調公式

$E(u(\cdot,T),B_R)$

$\leq E(u_0,B_{2R}) + CE_0T/R^2$

9/15

まとめ５ (スケーリングと単調公式)

1. 爆発解析
    (a) スケール不変性
    (b) スケール解の遠方での制御
    (c) 階層的議論
    (d) スケール極限の分類
2. 部分正則性
    (a) ε-正則性... 放物型局所理論
    (b) 単調公式 ... 時間と空間のトレードオフ

2D Smoluchowski-Poisson 方程式

$u_t = \nabla\cdot(\nabla u - u\nabla\Gamma * u)$

$(x,t) \in \mathbf{R}^2 \times (0,T)$

$u|_{t=0} = u_0(x) > 0$

$\in L^1 \cap L^\infty \cap C(\mathbf{R}^2)$

5. 弱解とスケール極限 - 非定常
質量量子化

下からの評価

定理 [Biler 98, Gajewski-Zacharias 98, Nagai-Senba-Yoshida 97]

$\lambda = \|u_0\|_1 < 8\pi$

$\Rightarrow$

$T = +\infty$

$\uparrow$

$\inf\{\mathcal{F}(u) \mid u \geq 0,\ \|u\|_1 = 8\pi\} > -\infty$

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\mathbf{R}^2} u(\log u - 1) - \frac{1}{2}\langle \Gamma * u, u\rangle$$

1) 局所化, $\mathcal{S}$: 爆発集合

$T < +\infty$

$$\boxed{\Rightarrow {}^\forall \text{孤立 } x_0 \in \mathcal{S} \quad \lim_{R\downarrow 0}\liminf_{t\uparrow T} \|u(t)\|_{L^1(B(x_0,R))} \geq 8\pi}$$

2) ε-正則性

$\lim_{R\downarrow 0}\limsup_{t\uparrow T} \|u(\cdot,t)\|_{L^1(B(x_0,R))} < {}^\exists\varepsilon_0$

$\Rightarrow x_0 \notin \mathcal{S}$

$$\boxed{{}^\exists\varepsilon_0 > 0,\ {}^\forall x_0 \in \mathcal{S},\ {}^\forall R > 0 \quad \limsup_{t\uparrow T_{\max}} \|u(\cdot,t)\|_{L^1(B(x_0,R))} \geq \varepsilon_0}$$

10/15

3) 弱形式

$\Rightarrow$ (単調公式) ${}^\forall\varphi \in C_b^2(\mathbf{R}^2)$

$$\left|\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{R}^2} u(\cdot,t)\varphi\right| \leq C_\varphi(\lambda + \lambda^2)$$

$\lambda = \|u(\cdot,t)\|_1$

${}^\forall x_0 \in \mathcal{S}$

$\lim_{R\downarrow 0}\liminf_{t\uparrow T} \|u(\cdot,t)\|_{L^1(B(x_0,R))} \geq \varepsilon_0$

$\|u(\cdot,t)\|_1 = \|u_0\|_1$

$\Rightarrow$

$\sharp\mathcal{S} < +\infty,\ {}^\forall x_0 \in \mathcal{S}$ 孤立

$\Rightarrow$

$\lim_{R\downarrow 0}\liminf_{t\uparrow T} \|u(\cdot,t)\|_{L^1(B(x_0,R))} \geq 8\pi$

$0 \leq \mu(dx,t) \in C_*([0,T], \mathcal{M}(\mathbf{R}^2 \cup \{\infty\})$

$u(x,t)dx = \mu(dx,t),\ 0 \leq t < T$

$$\boxed{\lim_{R\downarrow 0}\limsup_{t\uparrow T} \|u(\cdot,t)\|_{L^1(B(x_0,R))} = \lim_{R\downarrow 0}\liminf_{t\uparrow T} \|u(\cdot,t)\|_{L^1(B(x_0,R))}}$$

Collapse の形成

$$\mu(\cdot,T) = \sum_{x_0\in\mathcal{S}} m(x_0)\delta_{x_0} + f$$

$m(x_0) \geq 8\pi,\ 0 \leq f \in L^1(\mathbf{R}^2)$

11/15

上からの評価

定理 [Biler-Hilhorst-Nadzieja 94]

$\lambda = \|u_0\|_1 > 8\pi$

$\Rightarrow$

$T = T_{\max} < +\infty$

$\uparrow$

$u_0 \in L^1(\mathbf{R}^2, (1+|x|^2)dx)$

$\varphi(x) = |x|^2$, 弱形式

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{R}^2} |x|^2 u(\cdot,t) = 4\lambda - \frac{\lambda^2}{2\pi}$$

Kurokiba-Ogawa 03
局所2次モーメント＋スケーリング

$u_0 \in L^1(\mathbf{R}^2)$

1) 後方自己相似変換

$y = (x - x_0)/(T-t)$
$s = -\log(T-t)$, $t < T$

$+$ ODE 爆発レート

$\Rightarrow$

$z(y,s) = (T-t)u(x,t)$

$z_s = \nabla\cdot(\nabla z - z\nabla(\Gamma * z + |y|^2/4))$
$z = z(y,s) \geq 0$
$(y,s) \in \mathbf{R}^2 \times (-\log T, +\infty)$
$\|z(\cdot,s)\|_1 = \lambda$

12/15

2) ${}^\forall \varphi \in C_0^2(\mathbf{R}^2)$

$$\left|\frac{d}{ds}\int_{\mathbf{R}^2} z(y,s)\varphi(y)dy\right| \leq C_\varphi$$

$z(y,s) \geq 0$, $\|z(s)\|_1 = \lambda$

$\Rightarrow$

$(y = \infty$ を除外したスケール弱極限$)$

${}^\forall s_k \to +\infty$, ${}^\exists\{s_k'\} \subset \{s_k\}$

$z(y, s+s_k')dy \rightharpoonup {}^\exists\zeta(dy,s)$

$C_*(-\infty,+\infty; \mathcal{M}_0(\mathbf{R}^2))$

$\mathcal{M}_0(\mathbf{R}^2) = C_0(\mathbf{R}^2)'$

$C_0(\mathbf{R}^2)$
$= \{f \in C(\mathbf{R}^2 \cup \{\infty\}) \mid f(\infty) = 0\}$

$\forall s \in (-\infty,+\infty)$
$\zeta(dy,s)$ 有限 Radon 測度

$\zeta_s = \nabla\cdot(\nabla\zeta - \zeta\nabla(\Gamma * \zeta + |y|^2/4))$
in $\mathbf{R}^2 \times (-\infty,+\infty)$ の弱解

3)　放物包 $0 < R \leq 1$

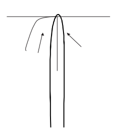
$$\left|\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{R}^2} u(\cdot,t)\varphi_{x_0,R}\right| \leq C_\lambda R^{-2}$$

$\Rightarrow$

$m(x_0) = \zeta(\mathbf{R}^2, s)$, $-\infty < s < +\infty$

プリスケール・コラプス質量
＝ スケール弱極限全質量

$$\mu(\cdot,T) = \sum_{x_0\in\mathcal{S}} m(x_0)\delta_{x_0} + f$$



$t = T$

放物包 .. 無限に広い放物領域

13/15

4) スケール引き戻し

$\zeta(dy,s)=e^{-s}A(dy',s')$
$y'=e^{-s/2}y,\ s'=-e^{-s}$

$\Rightarrow$

$A_s=\nabla\cdot(\nabla A-A\nabla\Gamma * A)$

$A=A(dy,s)\geq 0,\ (y,s)\in\mathbf{R}^2\times(-\infty,0)$

$A(\mathbf{R}^2,s)=m(x_0)$

$\Rightarrow$

${}^\forall s_k\uparrow+\infty,\ {}^\exists\{s_k'\}\subset\{s_k\}$

$A(dy,s-s_k')\rightharpoonup a(dy,s)$

in $C_*(-\infty,+\infty;\mathcal{M}(\mathbf{R}^2))$

5) 平行移動弱極限

${}^\forall\varphi\in C_0^2(\mathbf{R}^2)\oplus\mathbf{R}$

$\left|\frac{d}{ds}\langle\varphi,A(dy,s)\rangle\right|\leq C_\varphi$

$a_s=\nabla\cdot(\nabla a-a\nabla\Gamma * a)$

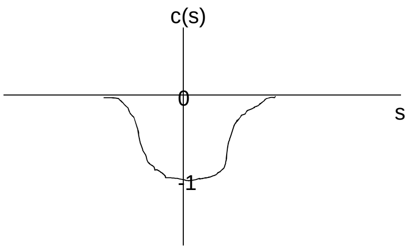
$a(dy,s)\geq 0,\ (y,s)\in\mathbf{R}^2\times(-\infty,+\infty)$
$a(\mathbf{R}^2,s)=m(x_0)$

$\mathcal{M}(\mathbf{R}^2)=[C_0(\mathbf{R}^2)\oplus\mathbf{R}]'$ を用いて
スケール全質量を包括

6) 局所 2 次モーメント

$0\leq c'(s)\leq 1,\ s\geq 0$
$-1\leq c(s)\leq 0,\ s\geq 0$

$$c(s)=\begin{cases} s-1, & 0\leq s\leq 1/4\\ 0, & s\geq 4\end{cases}$$



$m(x_0)>8\pi\Rightarrow{}^\exists\eta>0$

$\boxed{\langle c(|y|^2)+1,a(dy,0)\rangle\geq\eta}$

原点への集中＋全質量過剰
→時間大域存在不可

7) スケール不変性

$a(y,s)\mapsto a_\mu(y,s)=\mu^2a(\mu y,\mu^2 s)$

$\langle c(|y|^2)+1,a^\mu(dy,0)\rangle\geq\eta,\ {}^\forall\mu>0$

$\Rightarrow$

$\langle c(\mu^{-2}|y|^2)+1,a(dy,0)\rangle\geq\eta$

$0\leq c(\mu^{-2}|y|^2)+1\leq 1$

${}^\forall y\in\mathbf{R},\ c(\mu^{-2}|y|^2)+1\to 0,\ \mu\uparrow+\infty$

$\Rightarrow$ (優収束定理)

$0\geq\eta$, 矛盾

集中条件の解消

$$\boxed{\begin{array}{l}{}^\forall x_0\in\mathcal{S},\ m(x_0)=8\pi\\ \mu(\cdot,T)=\sum_{x_0\in\mathcal{S}}m(x_0)\delta_{x_0}+f\end{array}}$$

補足
1. 爆発レート

pre-scaled

$$u(x,t)dx \rightharpoonup \sum_{x_0 \in \mathcal{S}} 8\pi\delta_{x_0}(dx) + f(x)dx$$

$0 \leq f = f(x) \in L^1(\mathbf{R}^2) \cap C(\mathbf{R}^2 \setminus \mathcal{S})$

(1) collapse の形成
(2) 質量量子化

re-scaled

$z(y,s) = (T-t)u(x,t)$
$y = (x-x_0)/(T-t)^{1/2}$
$s = \log(T-t)$, $x_0 \in \mathcal{S}$

$$\boxed{\begin{array}{l} z(y,s+s')dy \rightharpoonup 8\pi\delta_0(dy) \\ C_*(-\infty,+\infty;\mathcal{M}_0(\mathbf{R}^2)) \\ s' \uparrow +\infty \end{array}}$$

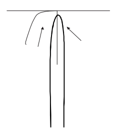
(1) sub-collapse の形成
(2) type II の爆発レート

定理 3 [Senba 07, Naito-S. 08]

${}^\forall x_0 \in \mathcal{S}$ type II

$$\lim_{t\uparrow T}(T-t)\,\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(B(x_0,b(T-t)^{1/2}))}$$
$= +\infty$, ${}^\forall b > 0$

全爆発機構は超放物包に押し込められる



$t = T$

超放物包 - 無限小の放物領域

2. エネルギーの量子化

Landau-Ginzburg モデル（定義域2次元）
H-sysytem
Yamabe 問題（臨界Sobolev指数）

… ハミルトニアンの制御（定常・非定常）

調和写像流（定義域2次元）

1. 爆発機構の量子化
1.1. 質量 (SP)
1.2. エネルギー (HH)

2. Lyapunov 関数の有界性
2.1. 創発性(SP)
2.2. エネルギー密度の非負性 (HH)

3. 定常解をprofile とする自己相似的爆発

4. sub-collapse 生成とType II の爆発レート

3. 高次元の質量量子化

$$-\Delta v = \frac{\lambda e^v}{\int_\Omega e^v} \text{ in } \Omega,\ v = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

$$w = v + \log\lambda - \log\int_\Omega e^v$$

$\Rightarrow$

$$-\Delta w = e^w \text{ in } \Omega,\ w = 定数 \text{ on } \partial\Omega$$

$$\int_\Omega e^w = \lambda$$

$\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 3$ 有界領域, $\partial\Omega$ 滑らか

$1 < q < \frac{n+2}{n-2}$

$$-\Delta w = w_+^q \text{ in } \Omega,\ w = 定数 \text{ on } \partial\Omega$$

$$\int_\Omega w_+^q = \lambda$$

スケーリング→ 臨界指数 $q = \dfrac{n}{n-2}$

質量量子化（境界条件無・有）

物理的背景

プラズマ自由境界問題 ↔ 圧縮性自己重力流体

（Toland 双対）

Chavanis のカイネティック理論

（Tsallis エントロピー）

$$u_t = \frac{m-1}{m}\Delta u^m - \nabla\cdot(u\nabla\Gamma * u)$$

in $\mathbf{R}^n \times (0,T)$

$m = 2 - \frac{2}{n}$

爆発閾値

Type II 爆発点の有限性 (R. Takahashi-S.)

4. 高次元爆発集合

1. (制約条件)

定理 [R. Takahashi-S.]

$\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, 凸領域, $\partial\Omega$ 滑らか

$\{(\lambda_k, v^k)\}$ 解の列, $1 < \gamma < \dfrac{n+2}{n-2}$

$$-\Delta v = v_+^\gamma \text{ in } \Omega,\ v = \text{constant on } \partial\Omega$$

$$\int_\Omega v_+^{\frac{n(\gamma-1)}{2}} = \lambda,\ \lambda_k \to \lambda_0 \geq 0$$

$\Rightarrow$

$^\exists$ 部分列

1. $\|v^k\|_\infty = O(1)$

2. $\sup_\Omega v^k \to -\infty$

3. $\lambda_0 = m_*$ 全空間質量, $^\exists x^* \in \Omega$

$\nabla R(x_*) = 0$, $^\exists x_k$, v^k の極大

$x_k \to x_*$, $v^k(x_k) \to +\infty$

$v^k \to -\infty$, 局所一様 in $\overline{\Omega}\setminus\{x_*\}$

$v^k(x)_+^{\frac{n(\gamma-1)}{2}} dx \rightharpoonup m_*\delta_{x_0}(dx)$ in $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$

2. (次元制御)

Ω 有界開集合, $T > 0$

$u = u(x,t) : \Omega \times [0,T] \to (-\infty, +\infty]$ 連続

$D(t) = \overline{\{x \in \Omega \mid u(x,t) = +\infty\}}$

$$D = \bigcup_{0\leq t\leq T} D(t) \times \{t\} \subset \Omega \times [0,T]$$

$u_t - \Delta u \geq 0$, $\mathcal{D}'(\Omega \times (0,T) \setminus D)$

$u = u(x,t)$ Lip. 連続 near in $\partial\Omega$, $t \in [0,T]$ 一様

定理 [F. Takahashi-S. 08b]

$$n \geq 2 \Rightarrow \int_0^T \mathrm{Cap}_2(D(t))dt \leq \frac{L^n(\Omega)}{2}$$

系 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, 有界凸領域

$f = f(u,\lambda) \geq 0$, 連続 in (u,λ)

$\{(u_k, \lambda_k)\}$, 解の列

$$-\Delta u = f(u,\lambda) \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

$$\int_\Omega f(u_k,\lambda_k)dx \leq C,\ \|u_k\|_\infty \to +\infty,\ \lambda_k \to \lambda_0$$

$\mathcal{S}$: 爆発集合 $\Rightarrow \mathrm{Cap}_2(\mathcal{S}) = 0$, $d_H(\mathcal{S}) \leq n-2$

5. 点渦乱流

Stochastic Intensity

Intensities of the vortices: independent random variables $\alpha \in [-1,1]$ subject to the the same distribution $P(d\alpha)$ (one species) $\Rightarrow$

$$\rho = \frac{\int_{[-1,1]} \alpha e^{-\alpha\beta\psi} P(d\alpha)}{\int_{[-1,1]} \left(\int_\Omega e^{-\alpha\beta\psi}\right) P(d\alpha)}, \ \psi = (-\Delta_D)^{-1}\rho$$

neutral case $\Rightarrow$

$$-\Delta v = \lambda \left(\frac{e^v - e^{-v}}{\int_\Omega e^v + \int_\Omega e^{-v}} \right) \text{ in } \Omega, \ v = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

....method of the minimal free energy, Neri 04

Ω: compact Riemannian surface
$$-\Delta v = \frac{\lambda(e^v - e^{-v})}{\int_\Omega (e^v + e^{-v})dx} \text{ in } \Omega, \ \int_\Omega v = 0$$

定理 [Jost-Wang-Ye-Zhou]

$\{(\lambda_k, v_k)\}$: non-compact solution sequence
$x_0 \in \Omega$: blowup point
$m_\pm(x_0)$: concentration mass of $\dfrac{\lambda_k e^{\pm v_k}}{\int_\Omega e^{\pm v_k} dx}$
$\Rightarrow$
$m_\pm(x_0) \in 8\pi\mathbf{N}$. ...use of *quaternions*
c.f. Nagasaki-S: complex analysis

Deterministic Intensity

Intensities of the vortices: deterministic subject to the distribution $P(d\alpha)$ (many species) $\Rightarrow$

$$-\Delta v = \lambda \int_{[-1,1]} \frac{\alpha e^{\alpha v}}{\int_\Omega e^{\alpha v}} P(d\alpha) \text{ in } \Omega, \ v = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

formal proof, Sawada-S. 08

neutral case $\Rightarrow$

$$-\Delta v = \lambda \left(\frac{e^v}{\int_\Omega e^v} - \frac{e^{-v}}{\int_\Omega e^{-v}} \right) \text{ in } \Omega, \ v = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

Joyce-Montgomery 73, Pointin-Lundgren 76

Ω: compact Riemannian surface
$$-\Delta v = \lambda \left(\frac{e^v}{\int_\Omega e^v} - \frac{e^{-v}}{\int_\Omega e^{-v}} \right) \text{ in } \Omega, \ \int_\Omega v = 0$$

予想 [Ohtsuka-S. 06]

$m_\pm(x_0) = 4\pi\ell(\ell \pm 1), \ \ell = 1, 2, \ldots$
not exclusively

定理 [Esposito-Wei]

$^\exists(m_+(x_0), m_-(x_0)) = (8\pi, 24\pi)$
for the Neumann problem on the disc

6. 双対変分構造

非平衡熱力学モデル

Halperin-Hohenberg-Ma 74
Hohenberg-Halperin 77

$\mathcal{F}$: 自由エネルギー

model (A) $\tau u_t = -\delta\mathcal{F}(u)$

model (B) $\tau u_t = \nabla \cdot (M\nabla\delta\mathcal{F}(u))$

ヘルムホルツ自由エネルギー

$F = U - TS$

$\leftrightarrow$ T 定温

$\leftrightarrow$ 正準集団

S エントロピー

U 内部エネルギー

Smoluchowski-Poisson 方程式 ...

ボルツマンエントロピー
自己重力相互作用

$\rightarrow$ **ヘルムホルツ自由エネルギー**

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\mathbf{R}^2} u(\log u - 1) - \frac{1}{2}\langle \Gamma * u, u \rangle$$

$\rightarrow$ **model (B) 方程式**

$$u_t = \nabla \cdot (u\nabla\delta\mathcal{F}(u))$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_1 = 0$$
(全質量保存)

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u(t)) = -\int_{\mathbf{R}^2} u|\nabla\delta\mathcal{F}(u)|^2 \leq 0$$
(全エネルギー保存)

Full-System of Chemotaxis

$$u_t = \nabla \cdot (\nabla u - u\nabla v)$$
$$\tau v_t = \Delta v + u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u \text{ in } \Omega \times (0,T)$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega \times (0,T)$$
$$\int_\Omega v = 0$$

Lyapunov 関数

$$L(u,v) = \int_\Omega u(\log u - 1) + \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2$$
$$-\langle v, u\rangle, \quad u \geq 0, \int_\Omega v = 0$$

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_1 = 0$$
$$\frac{dL}{dt}(u(t), v(t)) + \tau\|v_t\|_2^2$$
$$= -\int_{\mathbf{R}^2} u|\nabla(\log u - v)|^2 \leq 0$$

Model (B) - Model (A) 方程式

$$u_t = \nabla \cdot (u\nabla L_u(u,v))$$
$$\tau v_t = -L_v(u,v) \text{ in } \Omega \times (0,T)$$
$$u\frac{\partial}{\partial \nu}L_u(u,v) = 0 \text{ on } \partial\Omega \times (0,T)$$

Toland 双対変分構造

$F, G : X \to (-\infty, +\infty]$, prop. c'x l.s.c.

$$J(x) = G(x) - F(x)$$
$$J^*(p) = F^*(p) - G^*(p)$$

$$L(x,p) = F^*(p) + G(x) - \langle x, p\rangle$$
$$\inf_{(x,p)\in X\times X^*} L(x,p) = \inf_{p\in X^*} J^*(p)$$
$$= \inf_{x\in X} J(x)$$

Lagrange関数

[full system]

$$L(u,v) = \int_\Omega u(\log u - 1)$$
$$+\frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 - \langle v, u\rangle$$
$$u \geq 0, \int_\Omega u = \lambda, \int_\Omega v = 0$$

unfolding（半定常）
$v = (-\Delta_{JL})^{-1}u$

unfolding（半定常）
$u = \dfrac{\lambda e^v}{\int_\Omega e^v}$

自由エネルギー $\longleftrightarrow$ 場の汎関数

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega u(\log u - 1)$$
$$-\frac{1}{2}\left\langle(-\Delta_{JL})^{-1}u, u\right\rangle$$

[SP方程式]

$$\mathcal{J}_\lambda(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2$$
$$-\lambda\log\int_\Omega e^v + \lambda(\log\lambda - 1)$$

[点渦平均場]

(半)Toland 双対

相転移 … Fix-Caginalp, Penrose-Fife

相分離 … Coupled Cahn-Hilliard

記憶形状 … Pawlow-Zochowski

流体 … Euler-Poisson

Kuhn-Tucker 双対
（歪勾配系　E. Yanagida)

Gierer-Meinhardt（発生）

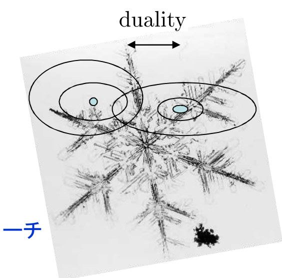
Fitz-Hu-Nagumo（神経）

7. 非定常状態のハミルトニアン制御

（LG方程式）

無限時間爆発（2D-SP方程式）
剰余項の消滅 … 未解決

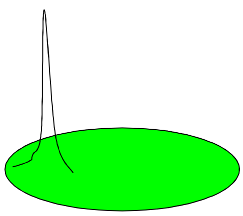
1. 循環的階層

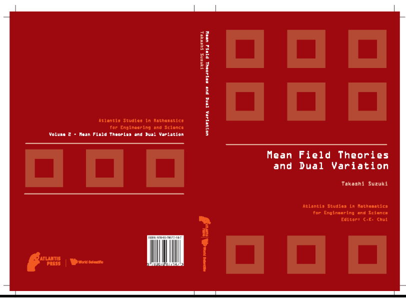


非線形・非平衡現象 - 原理とアプローチ

3. 場と粒子の双対性

2. 量子化する爆発機構





TS
Mean Field Theories
and Dual Variation
Atlantis Press
Amsterdam 2008

まとめ 6 （質量量子化の証明）

1. 量子化する爆発機構は 2D Smoluchowski-Poisson 方程式の有限時間爆発解に対して成立
2. 基本要因は変分構造に由来. 全質量保存, 自由エネルギーの減少, 弱形式
3. スケール不変性から臨界次元と臨界質量が選択
4. ε-正則性と単調公式から collapse の形成と質量の下からの評価
5. 質量の上からの評価は**スケール弱極限**と**放物包**
6. 自由エネルギー密度は負定値ではないが創発性によりエントロピー汎関数が主部となり sub-collapse が形成
7. スケール不変性と双対変分構造を通して, 物理学, 化学, 生物学, 幾何学などの多くの問題と関係

References (1)

1. L. Onsager, *Statistical hydrodynamics*, Suppl. Nuovo Cimento **6** (1949) 279-287.
2. E. Caglioti, P.-L. Lions, C. Marchioro, M. Pulvirenti, *A special class of statistical flows for two-dimensional Euler equations: a statistical mechanics description*, Comm. Math. Phys. **143** (1992) 501-525, **174** (1995) 229-260.
3. K. Nagasaki and T.S., Asymptotic Analysis **3** (1990) 173-188.
4. T.S., Ann. Inst. Henri Poincaré, AN **9** (1992) 367-398.
5. S. Baraket and F. Pacard, *Construction of singular limits for a semilinear elliptic equation in dimension 2*, Calc. Vari. in PDE **6** (1998) 1-38.
6. C.-C. Chen and C.-S. Lin, *Topological degree for a mean field equation on Riemann surfaces*, Comm. Pure Appl. Math. **56** (2003) 1667-1727.
7. P.-L. Lions, *On Euler equations and statistical physics*, Cattedra Galileiana, Pisa, 1997.
8. C. Marchioro and M. Pulvirenti, *Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids*, Springer-Verlag, New York, 1994.

References (2)

1. Y.Y. Li and I. Shafrir, *Blow-up analysis for solutions of $-\Delta u = Ve^u$ in dimension two*, Indiana Univ. Math. J. **43** (1994) 1255-1270.
2. I. Shafrir, *A* $\sup + \inf$ *inequality for the equation* $-\Delta u = Ve^u$, C. R. Acad. Sci. Paris **315** Série I (1992) 159-164.
3. Y.Y. Li, *Harnack type inequality: the method of moving planes*, Comm. Math. Phys. **200** (1999) 421-444.
4. W. Chen and C. Li, *Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations*, Duke Math. J. **63** (1991) 615-622.
5. 32. H. Brezis and F.Merle, *Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of $-\Delta u = V(x)e^u$ in two dimensions*, Comm. PDE **16** (1991) 1223-1253.

References (3)

1. M. Grossi, H. Ohtsuka, and T. S., preprint
2. F. Gladiali and M. Grossi, *On the specrum of a nonlinear planar problem*, Ann. Inst. Henri Poincaré, AN **26** (2009) 191-222.
3. F. Gladiali and M. Grossi, *Some results for the Gelfand's problem*, Com. PDE **29** (2004) 1335-1364.
4. H. Brezis and L.A. Peletier, *Asymptotics for elliptic equations involving the critical growth*, in; PDE and CV, Birkhäuser, Boston, 1989.

References (4)

1. H. Ohtsuka, T. Senba, and T. S. *Blowup in infinite time in the simplified system of chemotaxis*, Adv. Math. Sci. Appl. **17** (2007) 445-472
2. K. Sawada and T. S., *Derivation of the equilibrium mean field equations of point vortex system and Vortex filament system*, Theoretical and Applied Mechanics Japan **56** (2008) 285-290
3. H. Ohtsuka, T. Ricciardi, and T. S., *A Trudinger-Moser inequality associated with a point vortex meand field equation*, JDE, to appear
4. T. S. and F. Takahashi, *Capacity estimate for the blow-up set of parabolic equations*, Math. Z. **259** (2008) 867-878.
5. T.S., *Mean Field Theories and Dual Variation*, Atlantis Press, Paris, 2008
6. T. S. and F. Takahashi, *Nonlinear eigenvalue problem with quantization*, Handbook of Differential Equations, Stationary Partial Differential Equations, Vol. 5 (ed. M. Chipot), pp. 277-370, Elsevier, Amsterdam, 2008
7. T.S. *Free Energy and Self-Interacting Particles*, Birkhauser, Boston, 2005
8. T. Senba and T.S. *Applied Analysis: Mathematical Methods in Natural Science*, Imperial College Press, London, *second edition*, 2010
9. M. Grossi and F. Takahashi, JFA, to appear