

Discussion Paper Series 2009-02

信用リスク管理のためのアラームシステム構築

江上雅彦 山崎和俊

信用リスク管理のためのアラームシステム構築

江上雅彦* 山崎和俊†

平成 21 年 9 月 14 日

概要

自己資本量を BIS 基準等を満たしつつ適正にコントロールし、経営の効率性・安定性を確保することは銀行経営上の重要な課題である。特に先般の危機的状況においては短期間に大きな損失を蒙る可能性があるため、資本市場での自己資本調達・保有資産の売却を念頭においた予備的措置を取る必要がある。自己資本額が予め設定した値（閾値）を割りこんだときに警鐘（アラーム）を発動し、上記の自己資本充実策に着手することが一つの方策と考えられる。この場合、合理的な目的関数を設定し、その目的関数を最大・最小にする閾値を選択することは、金融機関の経営の安定性・資金効率の向上に繋がる重要な課題と見られる。本稿は貸出資産のデフォルト発生を表現するため下方ジャンプ付きのレヴィー過程を考察し、最適閾値を求めることを目的とする。貸出資産ポートフォリオにとって重要な変動要因は資産のデフォルトであるため、下方ジャンプのみのモデルを中心に数学的分析を加え、そのクラスのモデルに特徴的な尺度関数 (scale function) を利用した最適値計算の方法を提案する。リスク管理者等、実務家の直観的な理解を深めるため、モデルのパラメータの変化に関する比較静学を含む数値計算例を提示する。

1 はじめに

世界の金融マーケットは、2008 年に発生したリーマンブラザーズの破綻を発端とする金融危機の影響からようやく立ち直りの兆しを見せている。新 BIS 規制（いわゆるバーゼル II）の枠組み等で、今後一層先進的なリスク計測手法の開発など各金融機関のリスク管理の徹底が要求されるのは確実と考えられる。保有資産の価値低下が始まると金融機関は損失額の対自己資本比率を計算することとなるが、危機的な状況下では、今後の資産内容の悪化のペースを予測したうえで BIS 基準に対しどの程度余裕があるかを推測しなければならない。もし余裕度が小さくなったと判断されるならば¹、自己資本増強等の政策をどのタイミングで取るべきなのかという問題が生起する。経営陣にとっては、モニタリング 注意喚起（アラーム） 経営判断というサイクルを確立し、自行の自己資本比率を健全にコントロールすることが重要な課題となる。またこの際に用いられる注意喚起システムは費用対効果の面で効率的でなければならない。言い換えれば、合理的な目的関数を導入し最適なタイミングで注意喚起システムを作動させ、資金効率を可能な限り悪化させることなく、BIS 基準を十分に満たした状態で、安定的な銀行経営に資するシステムであることが必要とされる。本稿では貸出資産のポートフォリオに焦点を当て、具体的には以下の場合を考察する。

$$X := (\text{期初の自己資本額}) - (\text{純損失額}) \quad (1)$$

*京都大学大学院経済学研究科 606-8501 京都市左京区吉田本町 075-753-3430 Email: egami@econ.kyoto-u.ac.jp.

†大阪大学金融・保険教育研究センター 560-8531 大阪府豊中市待兼山町 06-6850-6469 Email: k-yamazaki@sigmath.es.osaka-u.ac.jp.

¹無論、何をもって余裕度が小さいというかの判断基準も科学的に確立されねばならない。本稿は本文中で述べる様にこれらの問題に対する一つの回答を提供することを目的としている。

が基準値 C を下回ることがないようにモニターしなければならないとする。つまり X が基準値 C を下回った場合に BIS 基準で要求される自己資本比率を下回ると仮定する²。クレジット資産のデフォルト等、瞬間的に大きな金額の損失が発生することを考えると、この X は下方ジャンプ付きのモデルで適切に表現されると考えられる。ある資産がデフォルトした場合に大きな損失を蒙る可能性があるため、現在の X 値がたとえ十分に基準値 C を上回っていたとしても、つぎの瞬間に大幅な損失（下方ジャンプ）により基準値 C を下回ってしまうリスクが存在することを認識しなければならない。よって C を所与とした場合、 X 値が C に近づいて来れば、ある時点で金融機関内部で警鐘を鳴らし、資本市場からの資金調達あるいは証券化による資産売却を行い自己資本増強策の準備に着手しなければならない。これらの方策を実行するには当然のことながら時間を要するため、前もって準備する必要があるためである。しかしながら基準値 C に対してあまりに早くに警鐘を鳴らしてしまうと、内部管理コストの増大、拙速な資産売却等による機会費用の増大等により資金効率が悪化してしまう。つまり誤認警報（false alarm）に対してはペナルティが掛かることに注意しなければならない。このように考えると、どのタイミングで自己資本増強策の準備を開始すべきかという閾値を最適に決定することは経営の安定・効率化の観点から重要かつ意義深い課題であると考えられる。

1.1 問題設定

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ において、損失額差し引き後の自己資本額をモデル化したものとして、レヴィー過程 $X = \{X_t; 0 \leq t < \infty\}$ を定義する。この確率過程 X は

$$X_t = x + ct + \sigma B_t + J_t, \quad 0 \leq t < \infty, \quad X_0 = x \quad (2)$$

と分解される。ここで c および $\sigma \geq 0$ は実数定数であり、 $B = \{B_t, t \geq 0\}$ は標準ブラウン運動である。これらのパラメータ c および σ は、それぞれ資産の平均成長率（利回り）と金利の変化等、デフォルトによらない資産価値の変動率を示す。さて $J = \{J_t; t \geq 0\}$ は B と独立したジャンプ過程を表す。ジャンプの方向が負であれば、デフォルト等による貸出資産の劣化を表現する。Section 2 では、ジャンプの方向が常に負である (spectrally negative) レヴィー過程を考える。つまり X のそのレヴィー測度 Π のサポート (support) が負値 $(-\infty, 0)$ である場合を考察する。この spectrally negative なレヴィー過程は、単純な複合ポワソン過程から、任意の有限区間 $[0, \epsilon]$, $\epsilon > 0$ においても無限回発生する微小な下方ジャンプまでを含んでおり、いわゆる rich な汎用性の高い有用なモデルとしてファイナンスの分野で活発に用いられている。セクション 2 ではレヴィー測度 Π の形状を特定せず一般の場合を対象とする。またセクション 3 では両方向のジャンプ³を含むモデルを考察するが、本稿では明示的な解を求めることを目的とするため、ジャンプの大きさが指数分布に従う拡散過程 (double exponential jump diffusion process) を対象とする。

ここで X は spacially homogeneous であるため、表記を簡単にするために、 $X_0 = x$ （期初の自己資本額）とし X がゼロになった時点が BIS 基準抵触と考えて差支えない。つまり

$$\tau_0 := \inf\{t \geq 0 : X_t < 0\}$$

²本稿はクレジット部門のリスク管理に焦点を当てているので、より正確にいうと基準値 C は金融機関の貸出・クレジット部門に配分された自己資本額を基に計算されている数値を意味する。

³正方向のジャンプは金利等の変化によらない貸出資産の価値上昇を示すと考える。例えば新機軸・合併等による企業価値の上昇を根拠とする当該企業への貸出債権価値の上昇など。

がBIS基準抵触時である。前段の表記でいえば $C = 0$ とセットしていることとなる。また X によって生成される情報系を $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ とする。レヴィー過程はマルコフ性を持つので、すべての $x \in \mathbb{R}$ について、確率測度 \mathbb{P} における x からスタートしたレヴィー過程の確率分布を \mathbb{P}^x と表し、同様に測度 \mathbb{P}^x による期待値を \mathbb{E}^x で表記するものとする。

アラームの作動時刻を \mathbb{F} -停止時刻 τ で表すとすると、警報を鳴らした瞬間に資産の悪化（下方ジャンプ）によりそのままBIS規準値を割り込んでしまうリスク

$$R_x(\tau) := \mathbb{P}^x \left(\inf_{0 \leq t \leq \tau} X_t < 0 \right) \quad (3)$$

および誤認警報による損失額（ペナルティ）

$$H_x^{(q,h)}(\tau) := \mathbb{E}^x \left[1_{\{\tau < \infty\}} \int_{\tau}^{\tau_0} e^{-qt} h(X_t) dt \right] \quad (4)$$

という二つの数量を考えることができる。なお $q \in [0, \infty)$ であり、 $h : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ は単調増加で有界 (bounded) な関数とする。単調増加性は資産価値 X_t が高ければその逸失利益 (regret) も大きくなることを示し、また有界性は資産価値が無限大になることはないため、逸失利益も無限大にならないことに相当している。よって関数 h に関するこれらの制限は経済学上も実務上も、何の支障をもたらさない。また $q \geq 0$ は各金融機関の割引率であり、通常は $q > 0$ である。また $q = 0$ でも差し支えないが、この場合は $\mathbb{E}^x[\tau_0] < \infty$ のケースを考えるものとする⁴。

さてこの2つの計量の線形結合による目的関数を

$$U_x^{(q,h)}(\tau, \gamma) = R_x(\tau) + \gamma H_x^{(q,h)}(\tau)$$

と定義する。この目的関数は変化点検出や逐次仮説検証問題におけるベイズ・リスク (Bayes risk) からヒントを得ている。ベイズ・リスクは変化点検出においては検出遅延の期待値と誤報確率の線形結合、逐次仮説検証では観測のサンプルサイズの期待値と誤診確率の線形結合として表され、両問題の最適解はベイズ・リスクを最小化する停止時刻となる。これらの問題は検出・検証の迅速さと正確さのトレードオフ問題であり、ベイズ・リスクによってそのトレードオフが表現されている。同様にして当問題では、リスクとペナルティのトレードオフを線形結合 U でモデルしている。変化点検出と逐次仮説検証問題に関しては例えば Wald and Wolfowitz [14] と Shiryaev [11] を参照のこと。

ここで、ある閾値 A を自己資本額 X が下回った瞬間にアラームを作動させるというルールを設定し、 $\tau_A := \inf\{t \geq 0 : X_t \leq A\}$, $A > 0$ とすれば、上記の二つの数値を使って

$$(I) \quad \min_{A \in [0, x]} \left(R_x(\tau_A) + \gamma H_x^{(q,h)}(\tau_A) \right) := \min_{A \in [0, x]} U_x^{(q,h)}(\tau, \gamma), \quad \gamma > 0 \quad (5)$$

という規準を考えることができる。つまり規準 (I) は、任意のウェイト γ のもとで、リスク (R) とペナルティ (H) の線形結合 (5) を最小にするような閾値 A^* を求めるという意味である。ここで $R_x(\tau_A) = \mathbb{P}^x(X_{\tau_A} < 0)$ は、閾値 A を下回った瞬間（下方ジャンプのため）同時にBIS規準値を割り込んでしまう確率を表す。この現象を以下アンダーシュート (undershoot) と呼ぶこととする。アンダーシュートリスクを小さくしようとすれば A をできるだけゼロから離して設定することとなるが、 A を大きく設定した場合は誤認警報によるペナルティが大きくなることから、規準 (I) を最小にする最適閾値 $A^* \in [0, x]$ が存在するものと考えられる。なお $q = 0$, $h = 1$ とした場合 $H_x^{(0,1)}(\tau_A) = \mathbb{E}^x[\tau_0 - \tau_A]$ となる。

⁴この仮定は本質的なものではなく、期待値の中の積分の範囲が $\tau = \tau_0 = \infty$ となる確率がゼロでない場合、例えば $q = 0$, $h = 1$ のとき $H_x^{(0,1)}(\tau) = \mathbb{E}^x[\infty - \infty]$ となり数学的に定義ができないことを回避するためである。

1.2 文献

われわれのモデルは資産額の総額をジャンプ付きの確率過程で表現する方法を採っているが、保険の分野では、Cramer-Lundberg モデル (1903) のように保険会社の純資産 (surplus) を複合ポワソン過程でモデル化し、純資産がゼロになる確率 (ruin probability) の計算、またジャンプの分布が heavy-tail の場合への拡張等、多くの文献が存在する。例えば Embrechts et al. [3] およびそこで示されている文献を参照のこと。近年では複合ポワソン過程から、より一般のジャンプ付き確率過程への拡張が盛んに行われている。たとえば Huzak et al. [5]、Jang [6] を見よ。また保険リスクの制御理論に関する最近のサーベイとしては Schmidli [10] を参照のこと。

本稿で必要となるオーバーシュート (またはアンダーシュート) 問題は再生理論の分野で扱われている。ランダム・ウォークのオーバーシュート問題については Gut [4] を、さらに一般的な場合 (非線形再生理論) については Siegmund [12] と Woodroffe [15] を参照のこと。一般的にはオーバーシュートの確率分布を解析的に求めることは不可能な場合が多い。しかしながら、Kou and Wang [7] のようにジャンプが指数分布の場合には無記憶性 (memoryless property) を使うことにより、明示的に解くことができる。これに関しては、セクション 3 で扱う。最後にレヴィー過程及び尺度関数については Bertoin [2] と Kyprianou [9] を参照のこと。

以下、セクション 2 で spectrally negative なレヴィー過程を、またセクション 3 で double exponential jump diffusion を扱う。セクション 4 はこれらの結果を用いた数値解析に当てられている。なお数学的証明はセクション 5 を参照されたい。

2 Spectrally Negative なレヴィー過程の場合

このセクションでは、ジャンプの方向が常に負である spectrally negative なレヴィー過程について考察することとする。先に述べたように、ジャンプの方向を限定しているものの、複合ポワソン過程から、任意の有限な時間区分 $[0, \epsilon]$, $\epsilon > 0$ においても無限回発生する微小な下方ジャンプまでをモデルの範囲に含んでおり、様々な事象を表現することができる。例えば、本稿では下方ジャンプは貸出資産ポートフォリオ内のデフォルトを表現する。微小な下方ジャンプは住宅ローン、クレジットカードローン、自動車ローン等、消費者向けで膨大な件数の小口貸出資産ポートフォリオ内のデフォルトを示す。一方、比較的大きな下方ジャンプは企業向け等の貸出債権のデフォルトを示す。以下の分析の結果を用いれば、ある閾値 A を通過する際のリスク量 (アンダーシュートおよび誤認警報による機会費用) を計測し、自己資本比率の安定を図るうえでの必要な情報をマネージメントに提供することができる。また spectrally negative なレヴィー過程に対しては、以下で見えていくように尺度関数が定義できる。この尺度関数を用いて、各種の確率や期待値をラプラス変換 (同時積率母関数) の形で表示することができるため、計算の負荷が小さいことが大きなメリットとなる。

Spectrally negative のケースにおいて、ある t を固定した場合、 X_t のラプラス指数 (Laplace exponent) $\psi(\beta) := \frac{1}{t} \log \mathbb{E}^0(e^{\beta X_t})$ はよく知られているように

$$\psi(\beta) = c\beta + \frac{1}{2}\sigma^2\beta^2 + \int_{(-\infty, 0)} (e^{\beta x} - 1 - \beta x 1_{\{x > -1\}}) \Pi(dx), \quad \beta \geq 0$$

である。測度 Π は $\int_{(-\infty,0)}(1 \wedge x^2)\Pi(dx) < \infty$ という通常の可積分条件を満たすものとする。関数 $\psi : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ は $\psi(0) = 0$ である凸関数であり、その右連続な逆関数

$$\Phi(\alpha) := \sup\{\lambda > 0 : \psi(\lambda) = \alpha\}, \quad \alpha \geq 0$$

が存在する。

Spectrally negative なレヴィー過程については尺度関数と呼ばれる以下の関数 $W^{(q)} : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}; q \geq 0$ が存在する: すべての非負の q において、関数 $W^{(q)}(x)$ は x について単調増加で微分可能、かつ

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} W^{(q)}(x) dx = \frac{1}{\psi(\beta) - q}, \quad \beta > \Phi(q) \quad (6)$$

を満たす。

規準 (I) を最小化する問題を解くため、まず割引率 $q \geq 0$ と閾値 $0 \leq A \leq x$ を固定し、(5) 式をこの尺度関数で表示することを考える。

2.1 アンダーシュートリスク $R_x(\tau_A)$

最初に閾値 A を下回る時刻 τ_A とその時刻での X の値 X_{τ_A} の同時分布のラプラス変換を考える。そのためアンダーシュート

$$Y_A := -(X_{\tau_A} - A) \quad \text{on } \{\tau_A < \infty\}, \quad 0 \leq A \leq x$$

を定義する。この時

$$R_x(\tau_A) = \mathbb{P}^x \{\tau_A < \infty, Y_A > A\}$$

である。まず

$$f(x, 0, \beta) := \mathbb{E}^x [e^{\beta X_{\tau_0}} 1_{\{\tau_0 < \infty\}}], \quad x > 0, \beta \geq 0 \quad (7)$$

という関数を考える。この様に定義すると $0 \leq A \leq x$ となる実数 A については

$$f(x, A, \beta) = \mathbb{E}^x [e^{-\beta Y_A} 1_{\{\tau_A < \infty\}}] = \mathbb{E}^x [e^{\beta(X_{\tau_A} - A)} 1_{\{\tau_A < \infty\}}], \quad 0 \leq A \leq x, \beta \geq 0 \quad (8)$$

となる。

Lemma 2.1. 任意の $q \geq 0, \beta \geq 0$ および $x > 0$ について

$$\mathbb{E}^x \left[e^{-q\tau_0 + \beta X_{\tau_0}} 1_{\{\tau_0 < \infty\}} \right] = e^{\beta x} - \frac{\psi(\beta) - q}{\beta - \Phi(q)} W^{(q)}(x) - (\psi(\beta) - q) \int_0^x e^{\beta(x-y)} W^{(q)}(y) dy$$

が成り立つ。

Proof. セクション 5.1 を参照のこと。 □

この補題を使えば (7) は、

$$\begin{aligned} f(x, 0, \beta) &= e^{\beta x} - \frac{\psi(\beta)}{\beta - \Phi(0)} W^{(0)}(x) - \psi(\beta) \int_0^x e^{\beta(x-y)} W^{(0)}(y) dy \\ &= e^{\beta x} \left(1 - \psi(\beta) \int_0^x e^{-\beta y} W^{(0)}(y) dy \right) - \frac{\psi(\beta)}{\beta - \Phi(0)} W^{(0)}(x) \\ &= e^{\beta x} \left(\psi(\beta) \int_x^\infty e^{-\beta y} W^{(0)}(y) dy \right) - \frac{\psi(\beta)}{\beta - \Phi(0)} W^{(0)}(x) \end{aligned}$$

となる。ここで最終行では尺度関数の定義 (6) を使っている。よって

$$\mathbb{E}^x \left[e^{-\beta Y_A} 1_{\{\tau_A < \infty\}} \right] = e^{\beta(x-A)} \left(\psi(\beta) \int_{x-A}^\infty e^{-\beta y} W^{(0)}(y) dy \right) - \frac{\psi(\beta)}{\beta - \Phi(0)} W^{(0)}(x - A) \quad (9)$$

である。以上の結果より、 $W^{(0)}(\cdot)$ と (9) より逆ラプラス変換を利用して、 $\mathbb{P}^x \{Y_A \in dy, \tau_A < \infty\}$ を求める。そしてアンダーシュートリスク $R_x(\tau_A) = \mathbb{P}^x \{Y_{\tau_A} > A, \tau_A < \infty\}$ を計算する可能となる。

Remark 2.1. 複合ポワソン過程による例

保険リスクの文献等に現れる有名な *Cramer-Lundberg* モデルに関連して、複合ポワソン過程の場合を特別な例として考察する。 X をドリフト $c > 0$ を用いて

$$X_t = x + ct - \sum_{n=1}^{N_t} \xi_n, \quad t \geq 0$$

と表す。ここで $N = \{N_t : t \geq 0\}$ はパラメータ $\lambda > 0$ のポワソン過程であり、 $\xi = (\xi_i)_{i \geq 1}$ は分布関数 F を持ち、 $(0, \infty)$ において値を取る、 N と独立な *i.i.d.* 確率変数列である。 X_t のラプラス指数は

$$\psi(\beta) = c\beta - \lambda \int_0^\infty (1 - e^{-\beta x}) F(dx), \quad \beta \geq 0$$

であるが、特にジャンプの大きさの分布 F がパラメータ μ の指数分布に従う場合は

$$\psi(\beta) = c\beta - \frac{\lambda\beta}{\mu + \beta}, \quad \beta \geq 0$$

となり、 x から独立の β の関数となる。下方ジャンプをも含めた全体のドリフトが正値となる：

$$c\mu - \lambda > 0$$

ようにパラメータを設定すると、 $\lim_{t \uparrow \infty} X_t = \infty$ *a.s.*、 $\Phi(0) = 0$ および

$$\psi'(0) := c - \frac{\lambda}{\mu}$$

が得られる。このケースでは $\mathbb{P}^x(\tau_A < \infty) \neq 1$ である。この場合、尺度関数は明示的に求まり (例えば、*Kyprianou [9] page 234* を参照)

$$W^{(0)}(x) = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{\lambda}{c\mu - \lambda} (1 - e^{-(\mu - \lambda/c)x}) \right) = B - Ce^{-Dx}$$

と表現される。ここで

$$B := \frac{\mu}{c\mu - \lambda} > 0, \quad C := \frac{\lambda}{c(c\mu - \lambda)} > 0, \quad D := \mu - \lambda/c > 0$$

である。よって (6) の左辺の積分は

$$\int_x^\infty e^{-\beta y} W^{(0)}(y) dy = \int_x^\infty e^{-\beta y} (B - Ce^{-Dy}) dy = B \int_x^\infty e^{-\beta y} dy - C \int_x^\infty e^{-(\beta+D)y} dy$$

と求まり、その結果 (7) は

$$f(x, 0, \beta) = \psi(\beta) \left(\frac{B}{\beta} - \frac{C}{\beta + D} e^{-Dx} \right) - \frac{\psi(\beta)}{\beta} W^{(0)}(x)$$

と求めることができる。実際、尺度関数 $W^{(a)}(\cdot)$ が明示的に求まる場合はまれで、一般的には数値的に求めなければならない。この方法については *Surya*[13] を参照のこと。そこで紹介されているのは *Abate and Whitt*[1] による逆ラプラス変換のアルゴリズムを利用した方法である。

2.2 ペナルティ関数 $H_x^{(q,h)}(\tau_A)$

ここでは、割引率 $q > 0$ 、閾値 $A \in [0, x]$ を固定した場合のペナルティ関数⁵

$$H_x^{(q,h)}(\tau_A) = \mathbb{E}^x \left[1_{\{\tau_A < \infty\}} \int_{\tau_A}^{\tau_0} e^{-qt} h(X_t) dt \right]$$

を尺度関数を使って表現することを考える。

Remark 2.2. $1_{\{\tau_A < \infty\}}$ は、 $\{\tau_A = \infty\}$ の場合にペナルティはゼロになることをモデルに組み入れるために必要である。しかし $\{\tau_0 = \infty\} \supseteq \{\tau_A = \infty\}$, $A \geq 0$ に注意し、 $Q(q, x) := e^{-qt} h(x)$ と表記すれば

$$\begin{aligned} H_x^{(q,h)}(\tau_A) &= \mathbb{E}^x \left[1_{\{\tau_A < \infty\}} \int_{\tau_A}^{\tau_0} Q(q, X_t) dt \right] \\ &= \mathbb{E}^x \left[\int_{\tau_A}^{\tau_0} Q(q, X_t) dt \right] - \mathbb{P}^x(\tau_A = \infty) \cdot \mathbb{E}^x \left[\int_{\tau_A}^{\tau_0} Q(q, X_t) dt \mid \tau_A = \infty \right] \\ &= \mathbb{E}^x \left[\int_{\tau_A}^{\tau_0} Q(q, X_t) dt \right] - \mathbb{P}^x(\tau_A = \infty) \cdot \mathbb{E}^x \left[\int_0^\infty Q(q, X_t) dt - \int_0^\infty Q(q, X_t) dt \mid \tau_A = \infty \right] \\ &= \mathbb{E}^x \left[\int_{\tau_A}^{\tau_0} Q(q, X_t) dt \right] \end{aligned}$$

となるため、われわれのペナルティ関数は

$$H_x^{(q,h)}(\tau_A) = \mathbb{E}^x \left[\int_{\tau_A}^{\tau_0} e^{-qt} h(X_t) dt \right] \tag{10}$$

と置いてよい。

⁵ $q = 0$ の場合については Section 1.1 の説明を参照の事。

すべての $\omega \in \Omega$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (実数直線上のボレル集合体) に対して、ランダム測度

$$M^{(A,q)}(\omega, B) := \int_0^{\tau_A(\omega)} e^{-qt} 1_{\{X_t(\omega) \in B\}} dt, \quad \omega \in \Omega, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

を定義する。 $M^{(A,q)}$ に関する積分を考えて

Lemma 2.2. 任意の $\omega \in \Omega$ について

$$\int_{\mathbb{R}} M^{(A,q)}(\omega, dy) h(y) = \int_0^{\tau_A(\omega)} e^{-qt} h(X_t(\omega)) dt$$

を得る。

Proof. セクション 5.2 を参照のこと。 □

上の補題とランダム測度の性質より

$$\mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau_A} e^{-qt} h(X_t) dt \right] = \mathbb{E}^x \left[\int_{\mathbb{R}} M^{(A,q)}(\omega, dy) h(y) \right] = \int_{\mathbb{R}} \mu_x^{(A,q)}(dy) h(y) \quad (11)$$

を得る。但し

$$\mu_x^{(A,q)}(B) := \mathbb{E}^x M^{(A,q)}(B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad (12)$$

である。この結果

$$\mathbb{E}^x \left[\int_{\tau_A}^{\tau_0} e^{-qt} h(X_t) dt \right] = \int_{\mathbb{R}} (\mu_x^{(0,q)}(dy) - \mu_x^{(A,q)}(dy)) h(y) \quad (13)$$

と表現される。さらに測度 (12) を尺度関数 $W^{(q)}(\cdot)$ によって以下のように表記することができる。

Lemma 2.3. 任意の $0 \leq A \leq x$ と $q \geq 0$ において

$$\mu_x^{(A,q)}(dy) = \begin{cases} \left(e^{-\Phi(q)(y-A)} W^{(q)}(x-A) - W^{(q)}(x-y) \right) dy, & y \geq A, \\ 0, & y < A. \end{cases}$$

Proof. セクション 5.3 を参照のこと。 □

ここまでの結果をまとめると、ペナルティ関数 (10) を尺度関数を用いて示した

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x \left[\int_{\tau_A}^{\tau_0} e^{-qt} h(X_t) dt \right] &= \int_0^{\infty} h(y) \left(e^{-\Phi(q)y} W^{(q)}(x) - W^{(q)}(x-y) \right) dy \\ &\quad - \int_A^{\infty} h(y) \left(e^{-\Phi(q)(y-A)} W^{(q)}(x-A) - W^{(q)}(x-y) \right) dy \end{aligned} \quad (14)$$

を得る。

3 Double Exponential Jump Diffusion の場合

このセクションでは、両方向のジャンプをもつレヴィー過程の一つである double exponential jump diffusion を考える。ただし本稿ではジャンプの大きさが指数分布に従う場合を考察する。いわゆる double exponential jump diffusion は Kou and Wang [7] 等による研究が存在するので、われわれのモデルに必要な計量を計算する過程は省き、計算の結果のみを記述することとする。Proposition 3.2 では $q = 0$ かつ $h = 1$ のときに最適閾値が明示的に得られることを示す。

まず $X = \{X_t; t \geq 0\}$ を

$$X_t := x + \sigma B_t + ct + \sum_{i=1}^{N_t} Z_i$$

と定義する。ここで N は B と独立のパラメータ λ のポワソン過程であり、 Z は両側指数分布で密度関数

$$p\eta_- e^{-\eta_-(-z)} 1_{\{z \leq 0\}} + (1-p)\eta_+ e^{-\eta_+ z} 1_{\{z > 0\}}, \quad z \in \mathbb{R}$$

を持つものとする。このときラプラス指数は

$$\psi(\beta) := c\beta + \frac{1}{2}\sigma^2\beta^2 + \lambda \left(\frac{p\eta_-}{\eta_- + \beta} + \frac{q\eta_+}{\eta_+ - \beta} - 1 \right) \quad (15)$$

で与えられる。また両方向のジャンプを考慮した X の (全体の) ドリフトは

$$\bar{u} := c + \lambda \left(-\frac{p}{\eta_-} + \frac{1-p}{\eta_+} \right) \quad (16)$$

となる。ここで $0 < \xi_1^* < \eta_- < \xi_2^* < \infty$ で

$$\psi(-\xi_1^*) = 0, \quad \psi(-\xi_2^*) = 0$$

を満たす ξ_1^* と ξ_2^* が一意に求まる。

Lemma 3.1. 任意の $0 \leq A \leq x$ について

1. $\mathbb{P}^x \{X_{\tau_A} < \infty\} = 1$ の必要十分条件は $\bar{u} \leq 0$ である。

2. もし $\bar{u} \leq 0$ であれば、

$$\mathbb{P}^x \{Y_A > y\} = e^{-\eta_- y} \frac{\xi_2^* - \eta_-}{\xi_2^*} \left[1 - e^{-(x-A)\xi_2^*} \right], \quad y \geq 0,$$

$$\mathbb{P}^x \{Y_A = 0\} = \frac{\eta_-}{\xi_2^*} + \frac{\xi_2^* - \eta_-}{\xi_2^*} e^{-(x-A)\xi_2^*}$$

となる。

3. また $\bar{u} > 0$ であれば、

$$\mathbb{P}^x \{\tau_A < \infty\} = \frac{\eta_- - \xi_1^*}{\eta_-} \frac{\xi_2^*}{\xi_2^* - \xi_1^*} e^{-(x-A)\xi_1^*} + \frac{\xi_2^* - \eta_-}{\eta_-} \frac{\xi_1^*}{\xi_2^* - \xi_1^*} e^{-(x-A)\xi_2^*} < 1,$$

$$\mathbb{P}^x \{\tau_A < \infty, Y_A > y\} = e^{-\eta_- y} \frac{(\eta_- - \xi_1^*)(\xi_2^* - \eta_-)}{\eta_- (\xi_2^* - \xi_1^*)} \left[e^{-(x-A)\xi_1^*} - e^{-(x-A)\xi_2^*} \right], \quad y \geq 0,$$

$$\mathbb{P}^x \{\tau_A < \infty, Y_A = 0\} = \frac{\eta_- - \xi_1^*}{\xi_2^* - \xi_1^*} e^{-(x-A)\xi_1^*} + \frac{\xi_2^* - \eta_-}{\xi_2^* - \xi_1^*} e^{-(x-A)\xi_2^*}$$

となる。この分布を利用すればアンダーシュートリスクは

Proposition 3.1. 任意の $0 \leq A \leq x$ について、

$$R_x(\tau_A) = \begin{cases} e^{-\eta-A} \frac{\xi_2^* - \eta_-}{\xi_2^*} [1 - e^{-(x-A)\xi_2^*}], & \bar{u} \leq 0, \\ e^{-\eta-A} \frac{(\eta_- - \xi_1^*)(\xi_2^* - \eta_-)}{\eta_- (\xi_2^* - \xi_1^*)} [e^{-(x-A)\xi_1^*} - e^{-(x-A)\xi_2^*}], & \bar{u} > 0 \end{cases}$$

となる。またペナルティ関数 ($q = 0$, $h = 1$ のとき)

$$H_x^{(0,1)}(\tau_A) = \mathbb{E}^x [\tau_0] - \mathbb{E}^x [\tau_A]$$

について以下の補題が成り立つ。

Lemma 3.2. 任意の $0 \leq A \leq x$ について

$$\mathbb{E}^x [\tau_A] = \begin{cases} \frac{1}{|\bar{u}|} \left[(x-A) + \frac{\xi_2^* - \eta_-}{\eta_- \xi_2^*} (1 - e^{-(x-A)\xi_2^*}) \right], & \text{if } \bar{u} < 0, \\ +\infty, & \text{if } \bar{u} \geq 0 \end{cases}$$

を得る。

この補題を用いて $\bar{u} < 0$ の場合に $H_x^{(0,1)}(\tau_A) = \mathbb{E}^x [\tau_0] - \mathbb{E}^x [\tau_A]$ を計算することができる。さらに最適閾値を明示的に求めることができる。

Proposition 3.2. $q = 0$, $h = 1$, $\bar{u} < 0$ と仮定する。このとき、

$$\tilde{A} = -\frac{1}{\eta_-} \log \left(\frac{\gamma \xi_2^*}{|\bar{u}| \eta_- (\xi_2^* - \eta_1)} \right)$$

と定義すると最適閾値は一意で

$$A^* = \begin{cases} 0, & \tilde{A} \leq 0, \\ \tilde{A}, & 0 < \tilde{A} < x, \\ x, & \tilde{A} \geq x \end{cases}$$

となる。

Proof. Proposition 3.1 と Lemma 3.2 より

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A} R_x(\tau_A) &= -\eta_- e^{-\eta-A} \frac{\xi_2^* - \eta_-}{\xi_2^*} \left(1 + \frac{\xi_2^* - \eta_-}{\eta_-} e^{-(x-A)\xi_2^*} \right), \\ \frac{\partial}{\partial A} H_x^{(0,1)}(\tau_A) &= \frac{1}{|\bar{u}|} \left(1 + \frac{\xi_2^* - \eta_-}{\eta_-} e^{-(x-A)\xi_2^*} \right) \end{aligned}$$

と求められ、

$$\frac{\partial}{\partial A} U_x(\tau_A, \gamma) = K_x(A) L(A)$$

となる。ここでは、

$$\begin{aligned} K_x(A) &:= 1 + \frac{\xi_2^* - \eta_-}{\eta_-} e^{-(x-A)\xi_2^*}, \\ L(A) &:= -\eta_- e^{-\eta-A} \frac{\xi_2^* - \eta_-}{\xi_2^*} + \frac{\gamma}{|\bar{u}|} \end{aligned}$$

としている。 $\xi_2^* > \eta_-$ であるため、すべての A において $K_x(A) > 1$ である。そのため、 $\frac{\partial}{\partial A} U_x(\tau_A, \gamma) = 0$ を得る為には $L(A) = 0$ つまり

$$A = -\frac{1}{\eta_-} \log \left(\frac{\gamma \xi_2^*}{|\bar{u}| \eta_- (\xi_2^* - \eta_1)} \right)$$

でなくてはならない。ここで $\xi_2^* > \eta_-$ であるため対数は実数値を取る。さて、 $K_x(A) > 1$ かつ $L(A)$ は A に関して単調増加であるため、

$$\frac{\partial}{\partial A} U_x(\tau_A, \gamma) > 0 \iff L(A) > 0 \iff A > \tilde{A}.$$

さらには $A \in [0, x]$ であるため、題意を得る。 □

Remark 3.1. ここで最適閾値が初期値 x の影響を受けないことがわかる。この事はレヴィー過程が *spacially homogeneous* である事と深く関わりがある。ここではジャンプが指数分布を持ち、 $q = 0$ かつ $h = 1$ という特別な場合を扱っていることに注意したい。同様の事がより一般的な場合に当てはまるかどうかについては今後の研究課題の一つである。

4 数値計算

ここではセクション 2 および 3 でモデルされるレヴィー過程に焦点を当て、最適閾値を数値的に求める。さらには目的関数及び各パラメータに関して、どのように最適閾値が変化するかを考察する。数値計算結果を述べる前に本稿で得られた計算方法をまとめる。

4.1 計算方法のまとめ

セクション 2 で述べられているようにアンダーシュートリスクのラプラス変換とペナルティーは尺度関数で表すことが出来る。尺度関数に関して、特別な場合には明示的な解を得る事が出来るのであるが、一般的には (6) を逆ラプラス変換する事になる。ここでは Surya [13] のアルゴリズムを利用する。

アンダーシュートリスクに関しては、2.1 で述べているように Y_A のラプラス変換 (9) を逆変換する事で密度関数さらにはアンダーシュートリスクを求めることが出来る。逆ラプラス変換が困難な場合には、モンテカルロ法による近似も可能である。また、Lemma 3.1 のように、ジャンプが指数分布を持つ場合にはアンダーシュートリスクを明示的に求めることが出来る。さらに $q = 0$ 、 $h = 1$ とおくと Proposition 3.2 で示されたように、最適閾値 A^* が明示的に得られる。

尺度関数 $W^{(q)}$ は x に関して指数関数的に増加し、事実 Surya [13] より

$$W^{(q)}(x) \sim \frac{e^{\Phi(q)x}}{\psi'(\Phi(q))} \quad \text{as } x \rightarrow \infty$$

である事が示されている。 x が大きな値をとる場合には計算の精度に影響する恐れがあるため、以下の変換を導入する。すべての $q \geq 0$ において

$$W^{(q)}(x) = e^{\Phi(q)x} W_{\Phi(q)}(x), \quad x \geq 0$$

かつ

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} W_{\Phi(q)}(x) dx = \frac{1}{\psi(\beta + \Phi(q)) - q}, \quad \beta > 0$$

を満たす x についての単調増加関数 $\{W_{\Phi(q)}(x); x \geq 0\}$ が存在する (証明は Kyprianou [9] と Surya [13] を参照のこと)。この $W_{\Phi(q)}$ を使うと Lemma 2.3 では任意の $0 \leq A \leq x$ について

$$\mu_x^{(A,q)}(dy) = e^{\Phi(q)(x-y)} [W_{\Phi(q)}(x-A) - W_{\Phi(q)}(x-y)] 1_{\{y \geq A\}} dy$$

と書けるので、ペナルティ関数は

$$H_x^{(q,h)}(\tau_A) = e^{\Phi(q)x} \left(W_{\Phi(q)}(x) \int_0^\infty e^{-\Phi(q)y} h(y) dy \right. \\ \left. - W_{\Phi(q)}(x-A) \int_A^\infty e^{-\Phi(q)y} h(y) dy - \int_0^A e^{-\Phi(q)y} W_{\Phi(q)}(x-y) h(y) dy \right)$$

と簡略できる。これを A について微分して整理すると

$$\frac{\partial}{\partial A} e^{-\Phi(q)x} H_x^{(q,h)}(\tau_A) = W'_{\Phi(q)}(x-A) e^{\Phi(q)x} \int_A^\infty e^{-\Phi(q)y} h(y) dy > 0$$

となるので、ペナルティ関数は A に関して単調増加であることが確認できる。さらに X が double exponential jump diffusion かつ $q = 0$ 、 $h = 1$ の場合には Lemma 3.2 を用いる事が出来る。

4.2 下方ジャンプのみの場合

$X_0 = x = 2$ 、 $q = 0.1$ とセットする。ここではまず下方ジャンプしかない場合を考える。つまり (15) は

$$\psi(\beta) := c\beta + \frac{1}{2}\sigma^2\beta^2 + \lambda \left(\frac{\eta_-}{\eta_- + \beta} - 1 \right) \quad (17)$$

となる。また (4) の h には指数効用関数

$$h(x) = 1 - e^{-\rho x}, \quad x \geq 0$$

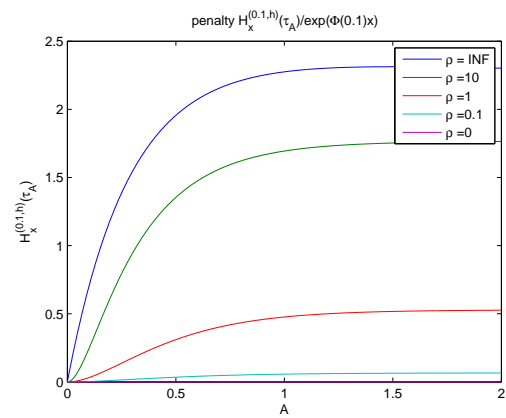
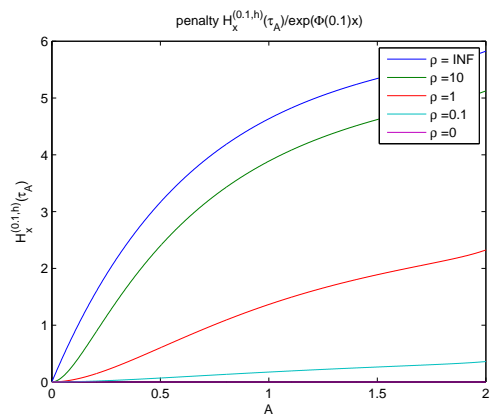
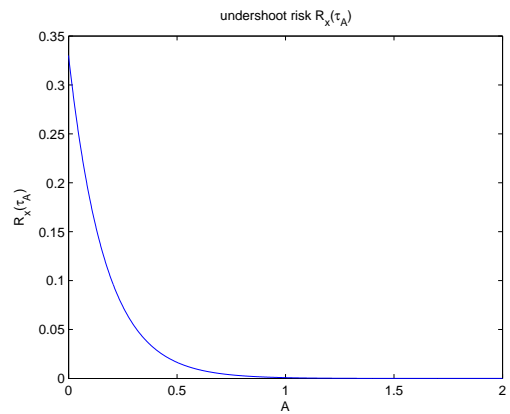
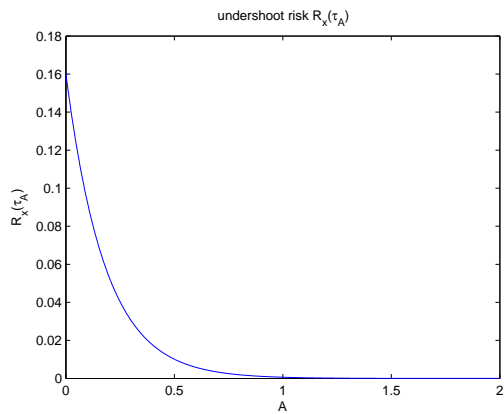
を使用する。ここで ρ は絶対リスク回避度 (coefficient of absolute risk aversion) と呼ばれ、すべての x において $\rho = -h''(x)/h(x)$ が成り立つ。特に $\rho = \infty$ の時には $h = 1$ となる。ここではドリフトが正の場合 ($\bar{u} > 0$) と負になる場合 ($\bar{u} < 0$) の両方の結果を得る為に以下の二ケースを考える。

ケース (a): $c = 0.1$, $\sigma = 0.2$, $\eta_- = 6$, $\lambda = 0.5$,

ケース (b): $c = 0.01$, $\sigma = 0.2$, $\eta_- = 6$, $\lambda = 0.5$.

さらにドリフトはケース (a) では $\bar{u} = 0.0166667 > 0$ 、ケース (b) では $\bar{u} = -0.0005556 < 0$ となる。

アンダーシュートリスク $R_x(\tau_A)$ には Proposition 3.1 を使い、ペナルティ $H_x^{(q,h)}(\tau_A)$ にはセクション 2.2 の解法を用いている。またそこで使われる尺度関数は Surya[13] のアルゴリズムを利用して計算した。図 1 はアンダーシュートリスクと各リスク回避度におけるペナルティを表している。閾値 A をゼロに近づけた場合にアンダーシュートリスクが大きくなるのが (a)(b) 両方のケースで見て取れる。 $\bar{u} < 0$ であ



(a) $\bar{u} > 0$

(b) $\bar{u} < 0$

図 1: (a) $\bar{u} > 0$ と (b) $\bar{u} < 0$ におけるアンダーシュートリスクと各指数効用のパラメータにおけるペナルティ

る (b) の場合の方がそのリスクが (A を所与とした場合) より大きくなるのは直観にも一致する。また予想通り、ペナルティは A の値が大きくなると単調に増加することが確認できる。また A を所与としてリスク回避度 ρ を大きくするとペナルティも単調に増加することが分かる。

次に図 2 は $\rho = \infty$ ($h = 1$) の場合の線形結合 U とその導関数を示している。ここで $\gamma^* = \gamma e^{\Phi(q)x}$ としている。(a)(b) いずれのケースにおいても内点解 (導関数のグラフが横軸と交わる点) が存在する場合には一意であることが確認できる。ウエイト γ が (よって γ^* も) 大きい場合、つまりペナルティをより重要なものをして評価する場合に、解である最適閾値 A^* が小さくなることが確認できる。たとえば (a) の $\gamma^* = 0.1$ の場合、内点解は存在しないため $A^* = 0$ が最適閾値となる。これに対して (b) における $\gamma^* = 0.1$ の場合は内点解 $A^* = 0.4$ が存在する。これは前にみたようにドリフトが負のケースでは、 A の値を所与とすると正のドリフトのケース (a) よりアンダーシュートリスクが大きく、ペナルティが小さいことに関連している。

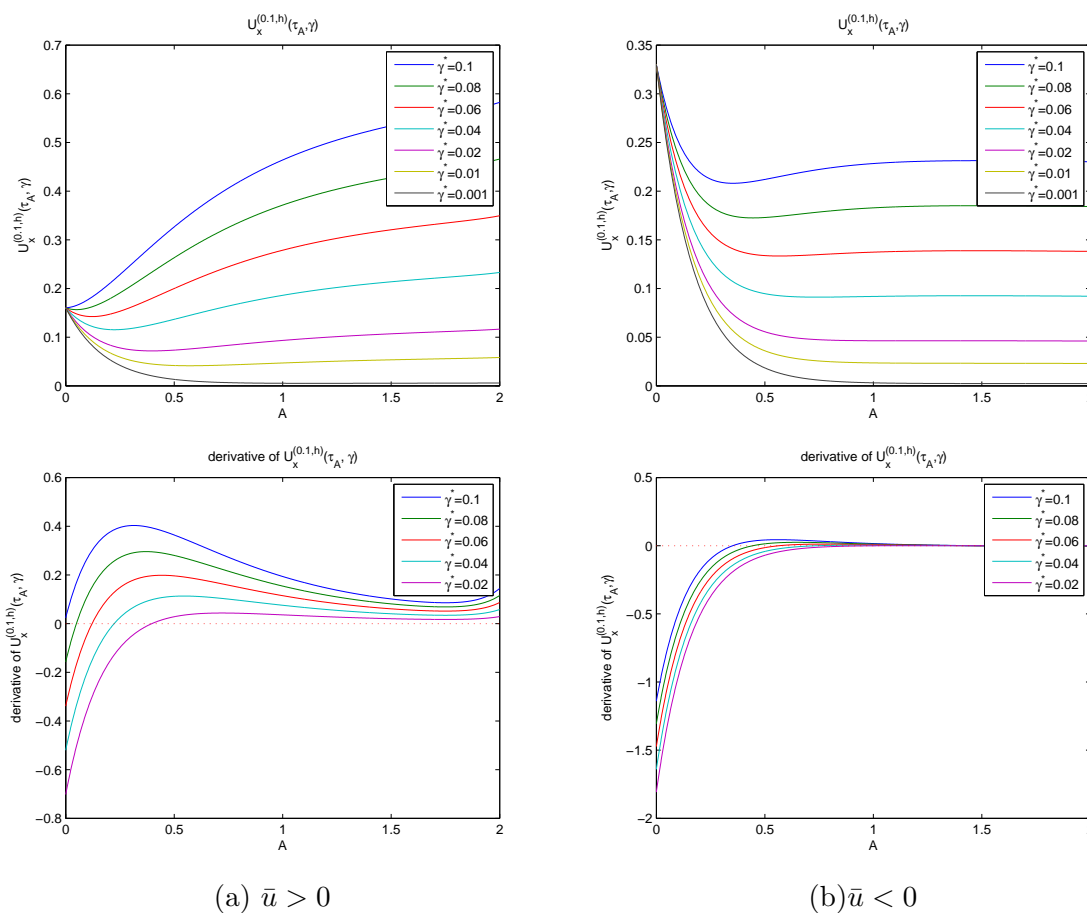


図 2: (a) と (b) における U とその導関数 ($\rho = \infty$ の場合)

次に図 3 はウエイト γ^* を横軸にとり、そのときの最適閾値 A^* を縦軸にとっている。それぞれのグラフはリスク回避度 ρ の値を変えて作成している (図 2 は $\rho = \infty$ ($h = 1$) の場合であったことに注意)。 γ^* を所与とすると ρ の値が大きくなると A^* は小さくなることが分かる。 $\rho = 0$ のとき $h(x) = 0$ となり、ペナルティは常にゼロとなる。よってアンダーシュートリスクだけを回避するため $A^* = x$ となる。

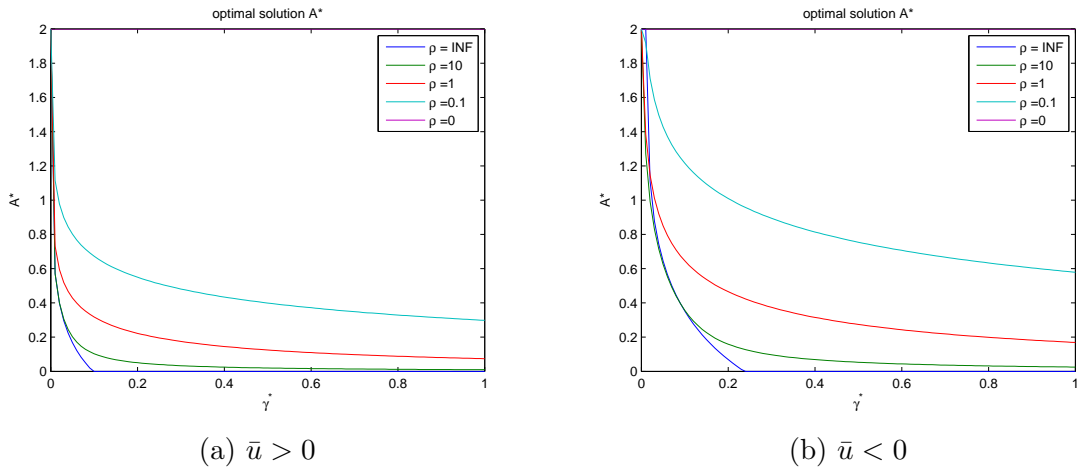


図 3: (a) と (b) における各指数効用のパラメータにおける最適閾値 A^*

4.3 両方のジャンプがある場合

ここでは下方ジャンプのみならず、上方ジャンプがある場合を考え $x = 5, c = -1, \sigma = 1, \eta_1 = \eta_2 = 0.5, p = 0.4, \lambda = 1$ とする。この時ドリフトは $\bar{u} = -1.4 < 0$ となる。 $q = 0$ かつ $h = 1$ とし、Proposition 3.2 を用いて計算している。図 4 はそれぞれ $U_x(\tau_A, \gamma)$ とその導関数及び最適閾値を表している（ここでは γ^* ではなく γ を使っている）。この場合も内点解が存在する場合は一意に決まることが分かる。結果については下方ジャンプのみの場合と本質的な差異はないと考えられる。

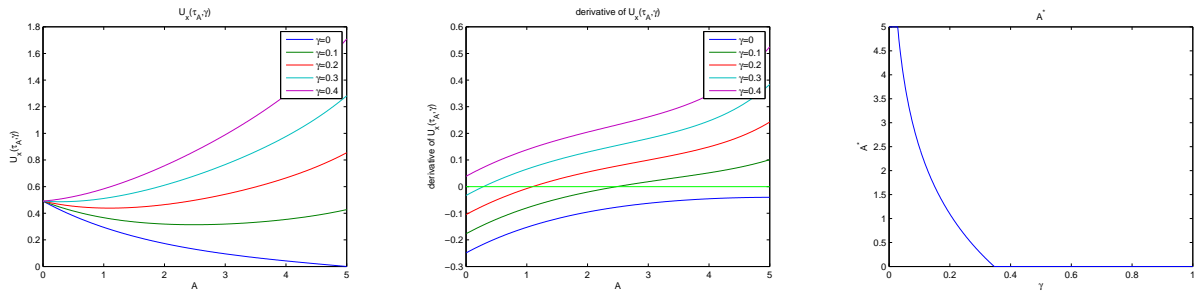


図 4: 両方のジャンプがある場合

4.4 パラメータに対しての最適閾値の変化

図 5 は最適閾値がパラメータに対しどのように変化するかを表している。(i)-(iv) ではそれぞれ (15) における c, λ, p, η_- に対しての最適閾値の変化である。ドリフト（式 (16)、図では u で表されている）が減少するにつれて最適閾値 A^* が単調増加することが確認できる。ドリフトが減少するにつれてアンダーシュートリスクは高まり、回避するために最適閾値が引きあがると考えられる。

一方で (v) では σ はドリフトには無関係なものの、値が増加するにつれ最適閾値は小さくなる。このことは σ が増加するにつれて、ゼロを X がジャンプで下回るのではなく、 $X_{\tau_0} = 0$ となる確率が高くなることに関係している。 $A = 0$ とすると $X_{\tau_A} = X_{\tau_0} = 0$ の場合にはペナルティーがゼロとなることに注意したい。

最後に (vi) では最適閾値は Proposition 3.2 で示されたように初期値 $X_0 = x$ に影響されないことが確認できる。

5 数学付録

5.1 Lemma 2.1 の証明

証明すべきは任意の $q \geq 0$, $\beta \geq 0$ および $x > 0$ について

$$\mathbb{E}^x \left[e^{-q\tau_0 + \beta X_{\tau_0}} 1_{\{\tau_0 < \infty\}} \right] = e^{\beta x} - \frac{\psi(\beta) - q}{\beta - \Phi(q)} W^{(q)}(x) - (\psi(\beta) - q) \int_0^x e^{\beta(x-y)} W^{(q)}(y) dy$$

が成り立つことである。

Proof. Kyprianou [9] Exercise 8.7 (ii) および Surya [13] Remark 2 より

$$\mathbb{E}^x \left[e^{-q\tau_0 + \beta X_{\tau_0}} 1_{\{\tau_0 < \infty\}} \right] = e^{\beta x} \left(-\frac{\psi(\beta) - q}{\beta - \Phi(q)} W_{\beta}^{(q-\psi(\beta))}(x) + Z_c^{(q-\psi(\beta))}(x) \right).$$

ここで、すべての $\nu \geq 0$ と $p \geq -\psi(\nu)$ において

$$W_{\nu}^{(p)}(x) = e^{-\nu x} W^{(p+\psi(\nu))}(x) \quad \text{and} \quad Z_{\nu}^{(p)}(x) = 1 + p \int_0^x W_{\nu}^{(p)}(y) dy$$

である。この表現を $W^{(q)}$ に戻して記載すれば

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x \left[e^{-q\tau_0 + \beta X_{\tau_0}} 1_{\{\tau_0 < \infty\}} \right] &= e^{\beta x} \left(1 + (q - \psi(\beta)) \int_0^x e^{-\beta y} W^{(q)}(y) dy - \frac{\psi(\beta) - q}{\beta - \Phi(q)} e^{-\beta x} W^{(q)}(x) \right) \\ &= e^{\beta x} + (q - \psi(\beta)) \int_0^x e^{\beta(x-y)} W^{(q)}(y) dy - \frac{\psi(\beta) - q}{\beta - \Phi(q)} W^{(q)}(x) \end{aligned}$$

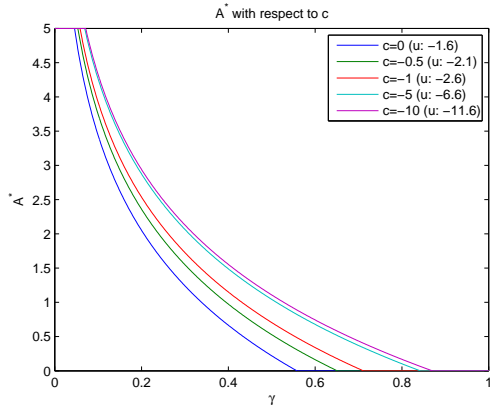
となり題意を得る。 □

5.2 Lemma 2.2 の証明

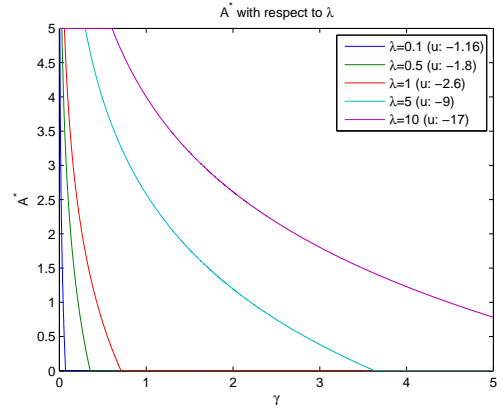
Lemma 2.2 の主張は、すべての $\omega \in \Omega$ について

$$\int_{\mathbb{R}} M^{(A,q)}(\omega, dy) h(y) = \int_0^{\tau_A(\omega)} e^{-qt} h(X_t(\omega)) dt \tag{18}$$

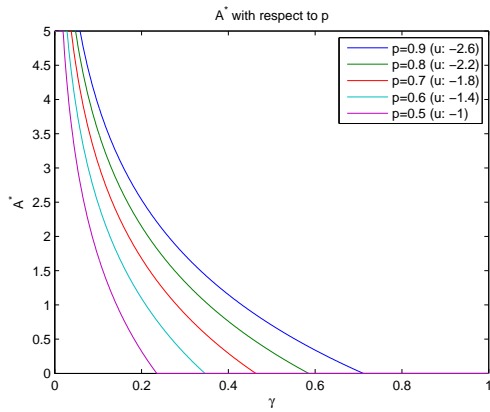
が成立することである。



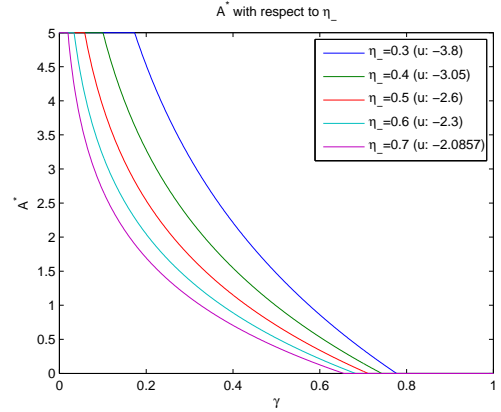
(i) c に対して



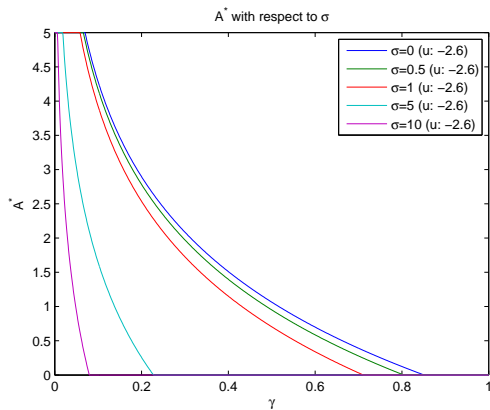
(ii) λ に対して



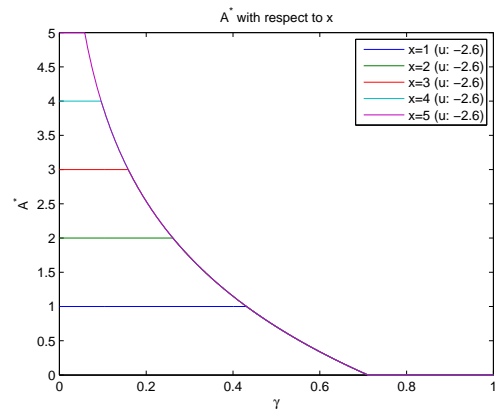
(iii) p に対して



(iv) η_- に対して



(v) σ に対して



(vi) x に対して

図 5: パラメータに対する最適閾値の変化: 変数として使用しない場合のパラメータは $x = 5$, $c = 1$, $\sigma = 1$, $\eta_- = 0.5$, $\eta_+ = 0.5$, $p = 0.9$, $\lambda = 1$ とする。 u はドリフトを表している。

Proof. n についての関数列を

$$h^{(n)} = d_n \circ h, \quad n \geq 1$$

の様にする。ここで

$$d_n(r) := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} 1_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})}(r) + n 1_{[n, \infty)}(r), \quad r \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

である。このとき $h^{(n)} \nearrow h$ (as $n \nearrow \infty$) へ各点収束する。 $h^{(n)}$ は単純関数 (simple function) なので、ボレル可測集合 $\{B_{n,i}; n \geq 1, 0 \leq i \leq n\}$ を使って、

$$h^{(n)}(y) = \sum_{i=1}^n b_i^{(n)} 1_{\{y \in B_{n,i}\}}, \quad n \geq 1$$

と書くことができる。 $b_i^{(n)}, n \geq 1$ は定数。よって (18) の左辺は

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} M^{(A,q)}(\omega, dy) h(y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} M^{(A,q)}(\omega, dy) \sum_{i=1}^n b_i^{(n)} 1_{\{y \in B_{n,i}\}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n b_i^{(n)} \int_{\mathbb{R}} M^{(A,q)}(\omega, dy) 1_{\{y \in B_{n,i}\}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n b_i^{(n)} M^{(A,q)}(\omega, B_{n,i}) \end{aligned}$$

となる。同様に右辺は単調収束定理より

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_A(\omega)} e^{-qt} h(X_t(\omega)) dt &= \int_0^{\tau_A(\omega)} e^{-qt} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n b_i^{(n)} 1_{\{X_t(\omega) \in B_{n,i}\}} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n b_i^{(n)} \int_0^{\tau_A(\omega)} e^{-qt} 1_{\{X_t(\omega) \in B_{n,i}\}} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n b_i^{(n)} M^{(A,q)}(\omega, B_{n,i}) \end{aligned}$$

を得るので題意は証明できた。 □

5.3 Lemma 2.3 の証明

まず $M_x^{(A,q)}$ と τ_A の定義より $\mu_x^{(A,q)}(-\infty, A) = 0$ である。Kyprianou and Surya [8] Lemma 4.8 より、任意の $\varepsilon \geq 0$ について

$$\mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau_A} e^{-qt} 1_{\{X_t \geq \varepsilon + A\}} dt \right] = \frac{e^{-\Phi(q)\varepsilon}}{\Phi(q)} W^{(q)}(x - A) - \int_0^{x-A-\varepsilon} W^{(q)}(y) dy$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \mu_x^{(A,q)}(-\infty, y) &= \mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau_A} e^{-qt} 1_{\{X_t \leq y\}} dt \right] \\ &= \frac{1}{q} (1 - \mathbb{E}^x[e^{-q\tau_A}]) - \frac{e^{-\Phi(q)(y-A)}}{\Phi(q)} W^{(q)}(x - A) + \int_0^{x-y} W^{(q)}(z) dz. \end{aligned}$$

この式を y について微分すれば題意を得る。

参考文献

- [1] Joseph Abate and Ward Whitt. A unified framework for numerically inverting Laplace transforms. INFORMS J. Comput., Vol. 18, No. 4, pp. 408–421, 2006.
- [2] Jean Bertoin. Lévy processes, Vol. 121 of Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [3] P. Embrechts, C. Kluppelberg, and T Mikosch. Modelling extremal events for insurance and finance. Applications of Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [4] Allan Gut. Stopped random walks. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, New York, second edition, 2009. Limit theorems and applications.
- [5] M. Huzak, M. Perman, H. Sikic, and Z. Vondracek. Ruin probabilities and decompositions for general perturbed risk processes. Ann. Appl. Probab., Vol. 14, pp. 1378–1397, 2004.
- [6] J. Jang. Jump diffusion processes and their applications in insurance and finance. Vol. 41, No. 1, pp. 62–70, 2007.
- [7] S. G. Kou and Hui Wang. First passage times of a jump diffusion process. Adv. in Appl. Probab., Vol. 35, No. 2, pp. 504–531, 2003.
- [8] A. E. Kyprianou and B. A. Surya. Principles of smooth and continuous fit in the determination of endogenous bankruptcy levels. Finance Stoch., Vol. 11, No. 1, pp. 131–152, 2007.
- [9] Andreas E. Kyprianou. Introductory lectures on fluctuations of Lévy processes with applications. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [10] H Schmidli. Stochastic control in insurance. Probability and Its Applications. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [11] A. N. Shiryaev. Optimal stopping rules, Vol. 8 of Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer-Verlag, Berlin, 2008. Translated from the 1976 Russian second edition by A. B. Aries, Reprint of the 1978 translation.
- [12] David Siegmund. Sequential analysis. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 1985. Tests and confidence intervals.
- [13] B. A. Surya. Evaluating scale functions of spectrally negative Lévy processes. J. Appl. Probab., Vol. 45, No. 1, pp. 135–149, 2008.
- [14] A. Wald and J. Wolfowitz. Bayes solutions of sequential decision problems. Ann. Math. Statistics, Vol. 21, pp. 82–99, 1950.
- [15] Michael Woodroofe. Nonlinear renewal theory in sequential analysis, Vol. 39 of CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, Pa., 1982.